Г.Е. ШИЛОВ

ОСНОВЫ СОВРЕМЕННОГО АНАЛИЗА

(Методическое пособие)

Выпуск 2.

М Г У - 1974 г.

§ 2.I. Теорема о неявной функции.

2.II. Обратная функция; постановка задачи. Пусть функция $x=\varphi(y): F \to E$ отображает множество F взаимно однозначно на множество E; тогда на множестве E естественно определяется обратная функция $y=f(x): E \to F$ такая, что $f[\varphi(y)]=y$, $\varphi[f(x)]=x$. В анализе часто возникает вопрос: при каких условиях у данной функции $x=\varphi(y)$ существует обратная ? Постановка вопроса уточняется следующим образом: множества E и F предполагаются областями в нормированных пространствах, функция $x=\varphi(y)$ – непрерывной и дифференцируемой в окрестности некоторой точки $b \in F$; если $\varphi(b)=a$ то желательно указать хотя бы окрестность точки a, в которой существует обратная функция $y=f(x)$, которая ожидается однозначно определенной, непрерывной и дифференцируемой. Этот вопрос решается просто для линейной функции $x=\varphi(y)$, действующей из m -мерного пространства $F=R_m$ в n -мерное пространство $E=R_n$. Выбрав каким-либо образом базисы в этих пространствах, мы запишем равенство $x=\varphi(y)$ в виде системы линейных уравнений с числовыми коэффициентами

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \varphi_{11} y_1 + \dots + \varphi_{1m} y_m, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n &= \varphi_{n1} y_1 + \dots + \varphi_{nm} y_m. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Спрашивается, когда из этой системы числа $y_1, \dots, y_m$ однозначно определяются по любым заданным числам $x_1, \dots, x_n$ (хотя бы из некоторой окрестности точки $(0,\dots,0) \in R_n$) ? В алгебре ответ известен: $n \times m$ – матрица $\Phi = \| \varphi_{ij} \|$ $(i=1,\dots,n;\ j=1,\dots,m)$ должна быть обратимой (в частности, необходимо условие $n=m$), и тогда искомое решение $y_1,\dots,y_m$ дается формулами Крамера.

Для непрерывной линейной функции $x=\varphi(y)$, действующей из нормированного пространства Y в нормированное пространство X вопрос об ее обратимости сложнее. В предположении взаимной однозначности отображения $\varphi(y): Y \to X$ естественно определенное обратное отображение $y=f(x): X \to Y$ всегда является линейным; далее, если Y и X полны – и непрерыв-

ным, следовательно, и дифференцируемым отображением.

Нас интересует обращение отображения, не являющегося линейным, и без специального предположения о его взаимной однозначности. Оказывается, что в этом общем случае, если нам нужна обратимость отображения $x = \varphi(y)$ лишь локальная, в окрестности данной точки $b \in Y$ вопрос можно свести к обратимости линейного отображения $\varphi'(b)$; именно, если функция $\varphi(y)$ дифференцируема и линейный оператор $\varphi'(b)$ - производная φ в точке b - обратим, то в некоторой окрестности точки $a = \varphi(b)$ действительно существует, и притом единственная, непрерывная и дифференцируемая функция $f(x)$ такая, что $f[\varphi(y)] = y$, $\varphi[f(x)] = x$. (2.17) Но справедлива и более общая теорема, в которой идет речь о разрешимости не специального уравнения $x - \varphi(y) = 0$, а значительно более общего уравнения $\Phi(x, y) = 0$.

2.12. Теорема о неявной функции. Пусть заданы метрическое пространство M и полное нормированное пространство Y ; пусть на произведении M и шара $V_r = \{ y \in Y : |y - b| \le r \}$ задана функция $z = \Phi(x, y)$, отображающая $M \times V_r$ в нормированное пространство Z, ограниченная, равномерно непрерывная и обладающая ограниченной и равномерно непрерывной производной $\frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial y}$. Пусть далее для некоторого $a \in M$ имеем $\Phi(a, b) = 0$ и оператор $\frac{\partial \Phi}{\partial y}(a, b)$ $(Y \to Z)$ обратим. Тогда существует шар $U_\delta = \{ x \in M : \rho(x, a) \le \delta \}$ и функция $y = f(x) : U_\delta \to V_r$, определенная и непрерывная в шаре U_δ, такая, что $f(a) = b$ и $\Phi(x, f(x)) \equiv 0$ при всех $x \in U_\delta$. Эта функция $f(x)$ единственна в следующем смысле: для любой другой функции $f_1(x)$ с значениями в Y, определенной и непрерывной в окрестности точки $a \in M$ и такой, что $f_1(a) = b$ и $\Phi(x, f_1(x)) = 0$, имеется шар $\{ x \in M, \rho(x, a) \le \delta' \}$, в котором $f_1(x) \equiv f(x)$. Эта функция $y = f(x)$ называется неявной функцией, определяемой уравнением $\Phi(x, y) = 0$ и условием $f(a) = b$.

Доказательство. Мы будем искать функцию $f(x)$ как неподвижную точку отображения F пространства $Y(U_\delta)$ (всех непрерывных ограниченных функций $y(x)$ с значениями в Y) в себя, задаваемого формулой

$$F[y(x)] \equiv \left[\frac{\partial \Phi(a,b)}{\partial y}\right]^{-1} \cdot \left[\frac{\partial \Phi(a,b)}{\partial y} y(x) - \Phi(x, y(x))\right] \quad (\text{I})$$

Если $y(x) = f(x)$ есть искомая функция, то $\Phi(x, y(x)) \equiv 0$ и равенство (I) дает нам $Ff(x) = f(x)$, т.е. $y(x)$ есть неподвижная точка отображения (I). Обратно, если $y(x)$ есть неподвижная точка отображения (I), так что

$$F[y(x)] \equiv y(x) - \left[\frac{\partial \Phi(a,b)}{\partial y}\right]^{-1} \Phi(x, y(x)) = y(x) \quad (2)$$

то, как легко видеть, и $\Phi(x, y(x)) \equiv 0$, так что задача о неявной функции действительно приводится к задаче о неподвижной точке для оператора (I).

Как можно было бы прийти к определению (I) ? В отображении $F(y)$ должна участвовать, естественно, функция $f(x)$ (как независимое переменное, аргумент отображения), и выражение $\Phi(x, f(x))$, которое на искомой функции должно обратиться в нуль. Комбинация $f(x) - \Phi(x, f(x))$ формально обращающаяся в $f(x)$ на искомой функции, непригодна, так как значения $f(x)$ лежат в Y, а значения $\Phi(x, f(x))$ – в Z. Поэтому нужно добавить у первого слагаемого множитель – оператор, переводящий Y в Z. Таким оператором является $\frac{\partial \Phi(a,b)}{\partial y}$. Теперь комбинация $\frac{\partial \Phi(a,b)}{\partial y} f(x) - \Phi(x, f(x))$ имеет смысл; но ее значения лежат в Z, а не в Y, где должны находиться значения $f(x)$; поэтому еще нужно наложить на нее оператор, переводящий Z в Y. Таковым является $\left[\frac{\partial \Phi(a,b)}{\partial y}\right]^{-1}$, и мы приходим к формуле (I).

петит

Величина δ еще не определена. Возьмем какое-нибудь $\delta > 0$ и рассмотрим нормированное пространство $Y(U_\delta)$ всех ограниченных непрерывных функций $y(x)$ с значениями в пространстве Y (ср. I.48) и нормой $\|y(x)\| = \sup_{x \in U_\delta} |y(x)|_Y$

Пространство $Y(U_\delta)$ полно (I.16в). Через $V_r(U_\delta)$ обозначим совокупность тех функций $y(x) \in Y(U_\delta)$, все значения которых при $x \in U_\delta$ лежат в шаре $V_r \subset Y$; совокупность $V_r(U_\delta)$ есть замкнутый шар в пространстве $Y(U_\delta)$, радиуса r, с

центром в точке $b(x)=b$, и поэтому сама является полным метрическим пространством. Отображение (2) определено для всех $y(x) \in V_r(\mathcal{U}_\delta)$ и принимает значения в пространстве $Y(\mathcal{U}_\delta)$. В силу предположений о функции $\Phi(x,y)$ и результатов I.16д и I.48 , отображение F является в шаре $V_r(\mathcal{U}_\delta)$ непрерывным и дифференцируемым. Его производную по I.48 и I.31–I.32, можно записать в виде

$$F'(y)=E-\left[\frac{\partial\Phi(a,b)}{\partial y}\right]^{-1}\frac{\partial\Phi(x,y(x))}{\partial y}=$$

$$=E-\left[\frac{\partial\Phi(a,b)}{\partial y}\right]^{-1}\left[\frac{\partial\Phi(x,y(x))}{\partial y}-\frac{\partial\Phi(a,b)}{\partial y}\right]-$$

$$-\left[\frac{\partial\Phi(a,b)}{\partial y}\right]^{-1}\frac{\partial\Phi(a,b)}{\partial y}=-\left[\frac{\partial\Phi(a,b)}{\partial y}\right]^{-1}\cdot\left[\frac{\partial\Phi(x,y(x))}{\partial y}-\frac{\partial\Phi(a,b)}{\partial y}\right]$$

Для нормы $F'(y)$ получается следующая оценка:

$$\|F'(y)\|\le\left\|\left[\frac{\partial\Phi(a,b)}{\partial y}\right]^{-1}\right\|\cdot\sup_{x\in\mathcal{U}_\delta}\left\|\frac{\partial\Phi(x,y(x))}{\partial y}-\frac{\partial\Phi(a,b)}{\partial y}\right\| \qquad (3)$$

Используя непрерывность функции $\frac{\partial\Phi(x,y)}{\partial y}$ при $x=a$, $y=b$, мы можем найти такие δ_1 и ρ, что при $|x-a|\le\delta_1$, $|y-b|\le\rho$ правая часть в (3) станет меньше $\frac{1}{2}$.
Итак, в $V_\rho(\mathcal{U}_{\delta_1})$ имеем $\|F'(y)\|<\frac{1}{2}$.

Далее заметим, что для $b(x)\equiv b$

$$F[b(x)]-b(x)=-\left[\frac{\partial\Phi(a,b)}{\partial y}\right]^{-1}\Phi(x,b)$$

и следовательно,

$$\|F[b(x)]-b(x)\|\le\left\|\left[\frac{\partial\Phi(a,b)}{\partial y}\right]^{-1}\right\|\cdot\sup_{x\in\mathcal{U}_\delta}|\Phi(x,b)|$$

Так как $\Phi(a,b)=0$ и функция $\Phi(x,y)$ непрерывна в точке $x=a$, $y=b$, то при выбранном уже ρ можно найти такое δ_2 , что будет

$$\| F[b(x)] - b(x) \|_{y(U_{\delta_2})} \le \frac{1}{2}\rho$$

Положим $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$; тогда для отображения $F(y)$, рассматриваемого в шаре $V_\rho(U_\delta)$, будут выполнены предположения теоремы I.43е. Применяя эту теорему, мы получаем существование в шаре $V_\rho(U_\delta)$ неподвижной точки преобразования $F(y)$. Обозначим ее через $f(x)$; для нее выполняется равенство (I), а, следовательно, и равенство $\Phi(x, f(x)) = 0$ для $x \in U_\delta$. Нам нужно еще показать, что $f(a) = b$. Заметим, что из $y(a) = b$ следует очевидно, что и $Fy(a) = b$. Теперь напомним, что неподвижная точка сжимающего отображения строится как предел итераций $y_0, Fy_0, F^2 y_0, \dots$ (013.22), где y_0 - любая точка рассматриваемого полного метрического пространства. Возьмем в качестве начальной точки итерационного процесса какую-либо функцию $y(x) \in V_\rho(U_\delta)$, $y(a) = b$, хотя бы функцию $y(x) = b$; тогда для всех функций, получающихся в процессе итерации также будет выполнено свойство $y(a) = b$; следовательно, этим же свойством будет обладать и предельная функция $f(x)$ - искомая неподвижная точка преобразования $F(y)$, что нам и требуется.

Нам остается доказать единственность найденного решения. Заметим, что тождество $F(f(x)) = f(x)$, полученное для точек из шара U_δ , верно и на любом меньшем шаре $U_{\delta'}$ $(\delta' < \delta)$, поэтому сужение функции $f(x)$ на этот меньший шар является неподвижной точкой преобразования $F(y)$ и в шаре $V_\rho(U_{\delta'})$. Пусть $f_1(x)$ - какое-либо другое решение задачи о неявной функции; во всяком случае, существует такое $\delta' \le \delta$, что в шаре $U_{\delta'}$ функция $f_1(x)$ определена, непрерывна и удовлетворяет условию $|f_1(x) - b| \le \rho$, т.е. лежит в шаре $V_\rho(U_{\delta'})$. Но так как у преобразования $F(y)$ в шаре $V_\rho(U_{\delta'})$ может быть быть лишь единственная неподвижная точка, то при $x \in U_{\delta'}$ получаем $f_1(x) \equiv f(x)$, что и требуется. Теорема доказана.

2.I3а. Теорема о неявной функции 2.I2 носит локальный характер, т.е. существование функции $y(x)$, являющейся решением уравнения $\Phi(x, y) = 0$, гарантируется лишь в некоторой окрестности точки a с известным значением $b = y(a)$. Было

бы желательно указать область существования функции $y(x)$ более определенным образом. Например, пусть известно, что функция $\Phi(x,y)$ определена, непрерывна и дифференцируема по y при всех $x \in M$, $y \in Y$, причем $\frac{\partial\Phi(x,y)}{\partial y}$ также всюду существует, непрерывна и обратима; спрашивается, если $\Phi(a,b)=0$, то будет ли определена соответствующая неявная функция $y(x)$ (существование которой обеспечивается теоремой о неявной функции лишь в некотором шаре $|x-a|<\delta$), если и не для всех $x \in M$, то хотя бы в шаре $|x-a|<r$, где r – фиксированное положительное число, не зависящее от выбора функции $\Phi(x,y)$?

Оказывается, даже и в такой, казалось бы, весьма выгодной ситуации ответ приходится дать отрицательный. Мы укажем сейчас для любого $\varepsilon > 0$ такую функцию $\Phi_\varepsilon(x,y)$ $(R_2 \to R_1)$, которая будет определена, непрерывна и дифференцируема по y при всех $\{x,y\} \in R_2$ и ее производная по y всюду непрерывна и обратима; при этом $\Phi_\varepsilon(0,0)=0$. Однако интервал $-h<x<h$ будет интервалом существования соответствующей неявной функции лишь при $h<\varepsilon$. А именно, положим $\Phi_\varepsilon(x,y)=x+\varepsilon-\varepsilon e^y$ все высказанные условия для функции $\Phi_\varepsilon(x,y)$ очевидным образом выполняются, однако соответствующая неявная функция $y=\ln\frac{x+\varepsilon}{\varepsilon}$ определена лишь при $x>-\varepsilon$

б. В утешение к сказанному в а относительно области существования неявной функции укажем на значительно более удовлетворительную ситуацию, имеющую место по отношению к единственности неявной функции.

Пусть метрическое пространство M связно, т.е. в нем нет (истинного) подмножества, являющегося одновременно замкнутым и открытым. Пусть на M заданы две непрерывные функции $y=f(x)$ и $y=f_1(x)$, $f(a)=f_1(a)=b$, каждая из которых удовлетворяет уравнению $\Phi(x,y)=0$. Тогда, если в каждой точке $\{x,f(x)\} \in M \times Y$ выполнены условия теоремы о неявной функции, то $f(x)=f_1(x)$ всюду на M.

Действительно, пусть $B=\{x \in M : f(x)=f_1(x)\}$. Множество B замкнуто, как множество нулей непрерывной функции

$f_1(x) - f(x)$ (05.14б); в то же время оно и открыто, так как по теореме о неявной функции содержит вместе со всякой точкой некоторую ее окрестность. Оно содержит точку a, так что не является пустым; следовательно, так как пространство M связно, мы имеем $B = M$, что и требовалось.

2.14. Теорема о производной неявной функции. Далее будем предполагать, что метрическое пространство M, о котором шла речь в 2.12–2.13, является областью в некотором нормированном пространстве X.

а. Теорема. Если выполняются условия теоремы 2.12 и, кроме того, функция $\Phi(x,y)$ дифференцируема в точке (a,b) (по пространству $X \times Y$), то построенная в 2.12 неявная функция $y = f(x)$ дифференцируема при $x = a$ и

$$f'(a) = -\left[\frac{\partial\Phi(a,b)}{\partial y}\right]^{-1}\frac{\partial\Phi(a,b)}{\partial x} \qquad (1)$$

Доказательство. Поскольку при $x = a$, $y = b$ функция $\Phi(x,y)$ дифференцируема, мы можем написать для достаточно малого Δx

$$0 = \Phi(a+\Delta x, f(a+\Delta x)) = \frac{\partial\Phi(a,b)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial\Phi(a,b)}{\partial y}\Delta y + o(|\Delta x| + |\Delta y|)$$

где $\Delta y = f(a+\Delta x) - f(a)$. Отсюда

$$\left|\left[\frac{\partial\Phi(a,b)}{\partial y}\right]^{-1}\frac{\partial\Phi(a,b)}{\partial x}\Delta x + \Delta y\right| \le \left\|\left[\frac{\partial\Phi(a,b)}{\partial y}\right]^{-1}\right\|\cdot\left|o(|\Delta x| + |\Delta y|)\right| \qquad (2)$$

Допустим, что Δx, и, следовательно, Δy, настолько малы, что

$$\left\|\left[\frac{\partial\Phi(a,b)}{\partial y}\right]^{-1}\right\|\cdot\left|o(|\Delta x| + |\Delta y|)\right| \le \frac{1}{2}(|\Delta x| + |\Delta y|)$$

Тогда мы имеем

$$|\Delta y| \le \left|\left[\frac{\partial\Phi(a,b)}{\partial y}\right]^{-1}\cdot\frac{\partial\Phi(a,b)}{\partial x}\Delta x\right| + \frac{1}{2}(|\Delta x| + |\Delta y|) \le$$

$$\le \left\|\left[\frac{\partial\Phi(a,b)}{\partial y}\right]^{-1}\right\|\cdot\left\|\frac{\partial\Phi(a,b)}{\partial x}\right\|\cdot|\Delta x| + \frac{1}{2}|\Delta x| + \frac{1}{2}|\Delta y|,$$

откуда

$$\frac{1}{2}|\Delta y| \leq \left(\frac{1}{2} + \left\| \left[\frac{\partial \Phi(a,b)}{\partial y}\right]^{-1} \right\| \left\| \frac{\partial \Phi(a,b)}{\partial x} \right\| \right) |\Delta x|,$$

т.е. $|\Delta y| \leq C|\Delta x|$ при некотором $C>0$; далее, подставляя эту оценку в неравенство (2), получаем

$$\left|\Delta y - \left(-\left[\frac{\partial \Phi(a,b)}{\partial y}\right]^{-1} \frac{\partial \Phi(a,b)}{\partial x} \Delta x\right)\right| \leq \left\| \left[\frac{\partial \Phi(a,b)}{\partial y}\right]^{-1} \right\| o((C+1)|\Delta x|) = o(|\Delta x|)$$

а это означает, что функция $f(x)$ дифференцируема при $x = a$ и имеет место формула (I), что и требовалось.

б. В силу I.47, для дифференцируемости функции $\Phi(x,y)$ в точке (a,b) достаточно - при выполнении остальных условий 2.I2 - чтобы в окрестности точки (a,b) существовала непрерывная производная $\frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial x}$. При этом предположении функция $\Phi(x,y)$ будет дифференцируемой не только в точке (a,b), но и в ее окрестности; неявная функция $y = f(x)$, построенная в 2.I2, будет также дифференцируема в окрестности точки $x = a$, и ее производная, вычисляемая по формуле, аналогичной формуле (I)

$$f'(x) = -\left[\frac{\partial \Phi(x,y(x))}{\partial x}\right]^{-1} \frac{\partial \Phi(x,y(x))}{\partial x} \qquad (3)$$

будет непрерывной функцией в окрестности точки $x = a$.

Применяя к обеим частям формулы (3) оператор $\frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial y}$ мы можем записать ее в эквивалентном виде

$$\frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial y} \cdot y'(x) + \frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial x} = 0 \qquad (4)$$

Формула (4) показывает, что в условиях теоремы для нахождения $y'(x)$ можно равенство $\Phi(x,y(x)) = 0$ дифференцировать по x, как сложную функцию от x.

2.I5. Случай числовой функции. Если в условии теоремы 2.I2 $z = \Phi(x,y)$ есть числовая функция аргумента $x \in M \subset X$ и вещественного аргумента $y \in F \subset R_1$, то оператор $\frac{\partial \Phi(a,b)}{\partial y}$ представляет собой умножение на число и его обратимость равносильна неравенству $\frac{\partial \Phi(a,b)}{\partial y} \neq 0$.

Величина производной $y'(a)\ (X \to R_1)$ в случае числовой функции может быть записана в виде

$$y'(a) = -\frac{\partial \Phi(a,b)/\partial x}{\partial \Phi(a,b)/\partial y}.$$

2.16. Случай функции $\Phi(x,y): R_{n+m} \to R_m$. Здесь теорема о неявной функции 2.12 допускает координатную трактовку:

а. Теорема. Пусть имеется система функций

$$\left.\begin{aligned} z_1 &= f_1(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) \\ &\cdots \\ z_m &= f_m(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

определенных в некоторой области пространства R_{n+m}. Предположим, что выполнены следующие условия:

(1) Существует точка $\{a,b\} = \{a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m\}$ такая, что

$$\left.\begin{aligned} f_1(a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m) &= 0 \\ &\cdots \\ f_m(a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m) &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

(2) Существует окрестность W точки $\{a,b\}$, в которой определены и непрерывны частные производные

$$\frac{\partial f_i(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)}{\partial y_j}, \quad i = 1, \ldots, m; \quad j = 1, \ldots, m.$$

(3) В указанной окрестности точки $\{a,b\}$ якобиан матрицы

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \left\| \begin{matrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_m} \\ \frac{\partial f_m}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial y_m} \end{matrix} \right\|$$

отличен от нуля.

Тогда существует окрестность U_δ точки $a \in R_n$ $a = \{a_1, \ldots, a_n\}$ и в ней система непрерывных функций

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= y_1(x_1, \ldots, x_n) \\ y_m &= y_m(x_1, \ldots, x_n) \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

такая, что

$$y_1(a_1,\ \ldots,a_n)\ b_1,\ \ldots,\ y_m(a_1,\ \ldots,a_m)\ b_m, \qquad (4)$$

$$\left.\begin{aligned} f_1(x_1,\ \ldots,x_n,y_1(x_1,\ \ldots,x_n),\ \ldots,y_m(x_1,\ \ldots,x_n)) &= 0 \\ f_m(x_1,\ \ldots,x_n,y_1(x_1,\ \ldots,x_n),\ \ldots,y_m(x_1,\ \ldots,x_n)) &= 0 \end{aligned}\right\} (5)$$

Система функций с указанными свойствами может быть лишь единственной.

Если в дополнение к предыдущему известно, что в окрестности W существует и непрерывная производная

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \begin{Vmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \ldots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1} & \ldots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{Vmatrix}$$

то функции $y_1,\ \ldots,y_m$ дифференцируемы при $x\in U_\delta$ и

$$y'(x) = \begin{Vmatrix} \dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} & \ldots & \dfrac{\partial y_m}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial y_1}{\partial x_n} & \ldots & \dfrac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{Vmatrix} = -\left[\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right]^{-1}\cdot\left[\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right] \qquad (6)$$

2.17. Теорема об обратной функции.

а. Пусть $x=\varphi(y):(F\subset Y)\to(E\subset X)$ — функция, дифференцируемая в некоторой окрестности точки $y=b\in Y$, причем оператор $f'(y)$ непрерывен в точке $y=b$ и обратим. Пусть $\varphi(b)=a\in X$. Тогда существуют окрестность $V_\delta=\{x\in X: |x-a|<\delta\}$ и дифференцируемая функция $y=f(x): V_\delta\to Y$ такие, что $f[\varphi(y)]=y$ при всех $y\in V_\delta$, причем оператор $f'(x)\ (X\to Y)$ является обратным к оператору $\varphi'(y)$:

$$f'(x)=[\varphi'(y)]^{-1}\text{, где } y=f(x)$$

Доказательство этой теоремы получается непосредственно из теоремы о неявной функции, если положить $\Phi(x,y)=x-\varphi(y)$

и заметить, что $\frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial x}$ есть единичный оператор, а $\frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial y} = -\varphi'(y)$.

б. Отображение $y = f(x): G \subset X \to Y$ с непрерывной производной $f'(x)$ называется *диффеоморфизмом* в G, если оно взаимно однозначно (с G на $f(G)$) и если естественно определенное обратное отображение $x = \varphi(y): f(G) \to G$ также обладает непрерывной производной.

В силу а, *достаточным* условием того, чтобы отображение $y = f(x)$ с непрерывной производной $f'(x)$ было диффеоморфизмом в некоторой окрестности $U(a)$ точки $a \in G$, является обратимость оператора $f'(a)$. Это условие и *необходимо*, поскольку при наличии обратного дифференцируемого отображения $x = \varphi(y)$ по I.33а должны выполняться равенства $f'(a)\cdot\varphi'(b) = E_Y$, $\varphi'(b)\cdot f'(a) = E_X$ и, следовательно, оператор $f'(a)$ обратим.

Если имеется диффеоморфизм $y = f(x): G \subset X \to Y$, то всякая дифференцируемая функция $z = \psi(x): G \to Z$ может быть представлена, как дифференцируемая функция от $f(x)$; это вытекает из формулы

$$z = \psi(x) = \psi(\varphi(f(x))) = g(f(x)), \text{ где } g(y) = \psi(\varphi(y)).$$

в. Предположим, что в б пространства X и Y конечномерны. $X = R_n$, $Y = R_m$. Пусть в пространстве X выбраны координаты $x_1, \ldots, x_n$, а в пространстве Y – координаты $y_1, \ldots, y_m$. Отображение $y = f(x)$ аналитически может быть записано формулами вида

$$y_i = f_i(x_1, \ldots, x_n) \qquad (i = 1, \ldots, m)$$

Существование непрерывной производной $f'(x)$ в области G равносильно существованию и непрерывности в этой области всех производных $\frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j}$ (I.25а). Пусть $m = n$ и матрица Якоби $\left\| \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j} \right\|$ обратима; тем самым обратим и оператор $f'(a)$. По б, отображение $y = f(x)$ есть диффеоморфизм некоторой окрестности $U(a)$ на некоторую окрестность $V(b)$ точки $b = f(a) \in Y$. Для каждой точки

$y=(y_1,\dots,y_n)\in V(b)$ найдется точка x $x=(x_1,\dots,x_n)\in U(a)$ такая, что $f(x)=y$. Поэтому числа $y_1,\dots,y_n$ наравне с числами $x_1,\dots,x_n$, в принципе однозначно определяют положение точки x в области G. Таким образом, эти числа $y_1,\dots,y_n$ могут служить новыми координатами точки x.

Так, формулы

$$x_1 = r\cos\theta, \qquad x_2 = r\sin\theta \qquad \text{(I)}$$

определяют на плоскости x_1, x_2 новые координаты r,θ – полярные координаты (05.71). Так как

$$\det\begin{Vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial r} & \frac{\partial x_1}{\partial\theta} \\ \frac{\partial x_2}{\partial r} & \frac{\partial x_2}{\partial\theta}\end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta\end{Vmatrix} = r$$

то числа r,θ могут быть взяты за новые координаты в окрестности любой точки, отличной от точки $r=0$ $(x=0, y=0)$; в самой этой точке взаимная однозначность отображения (I) очевидным образом нарушается.

Если имеется диффеоморфизм $y=f(x): G\subset R_n\to R_n$, или

$$y_i = f_i(x_1,\dots,x_n) \qquad (i=1,\dots,n),$$

то по б всякая дифференцируемая функция $z=\psi(x): G\to Z$ может быть представлена, как дифференцируемая функция от $f(x)$, т.е. от $f_1(x),\dots,f_n(x)$

$$z=\psi(x)= g(f_1(x),\dots,f_n(x)).$$

г. Пусть снова функции с непрерывными производными

$$y_i = f_i(x_1,\dots,x_n) \qquad \text{(I)}$$

определяют в области $G\subset R_n$ новые координаты $\{y\}=\{y_1,\dots,y_n\}$, $\det\left\|\frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j}\right\|\neq 0$. Линия L_j с уравнениями

$$y_i = f_i(a_1,\dots,a_{j-1},x_j,a_{j+1},\dots,a_n),\quad i=1,\dots,n$$

называется j-й координатной линией системы $\{y\}$, проходящей через точку a. Соответствующие направляющие векторы

$$g_j = \left\{ \frac{\partial f_1(a)}{\partial x_j}, \ldots, \frac{\partial f_n(a)}{\partial x_j} \right\}, \quad j=1,\ldots,n$$

линейно независимы; по определению они образуют местный базис системы координат $\{y\}$ в точке a. Любой вектор $\xi = \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i$ можно разложить и по векторам местного базиса:

$$\xi = \sum_{j=1}^{n} \eta_j g_j \tag{2}$$

Выражения составляющих η_j через ξ_i можно получить следующим образом. Обозначим для краткости $p_{ij} = \frac{\partial f_i(a)}{\partial x_j}$ и пусть q_{ij} элементы обратной матрицы; тогда из равенств $g_j = \sum_{i=1}^{n} p_{ij} e_i$ следует $e_i = \sum_{j=1}^{n} q_{ij} g_j$ и далее $\sum_{j=1}^{n} \eta_j g_j = \xi = \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \xi_i q_{ij} g_j$, откуда вследствие линейной независимости векторов g_j мы выводим, что

$$\eta_j = \sum_{i=1}^{n} q_{ij} \xi_i \tag{3}$$

Аналогичные координатные линии проходят через любую точку x области G и в любой точке $x \in G$ можно построить соответствующий местный базис; следует только иметь в виду, что в отличие от фиксированного в R_n базиса $e_1, \ldots, e_n$ местный базис $\{g_i(x)\}$ вообще говоря изменяется вместе с x.

§ 2.2. Локальная структура дифференцируемой функции.

2.21. С теоремой о неявной функции тесно связан вопрос о локальной структуре функции $y=f(x): G\subset X \to Y$ класса C^1. Если в данной точке $a\in G$ оператор $f'(a)$ обратим, то функция $f(x)$ – отображает некоторую окрестность точки a диффеоморфно на некоторую окрестность точки $b=f(a)\in Y$, как это следует из теоремы об обратной функции 2.17. Что происходит, если оператор $f'(a): X\to Y$ не является обратимым ?

а. Чтобы поставить задачу правильно и предсказать результат, рассмотрим вначале линейное преобразование $y=Ax: R_n\to R_m$ определяемое (в каких-либо фиксированных базисах этих пространств) формулами

$$y_i=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \qquad (i=1,\dots,m) \tag{1}$$

Когда точка x пробегает R_n, вектор $y=Ax$ вообще говоря, не пробегает в с е г о пространства R_m; точным образом пространства R_n при отображении (1) является некоторое подпространство $\operatorname{Im} A = R\subset R_m$ x/). Прежде всего, естественно, возникает вопрос: какова размерность подпространства R ? Как его описать в координатах y_i ? Сюда же тесно примыкает другой вопрос. В одну точку образа $y=(y_1,\dots,y_m)\in R_m$, вообще говоря, отображается не одна точка $x\in R_n$, а целое множество точек, которое мы назвали в 1.13 поверхностью уровня функции $f(x)$ и которое также называется полным прообразом точки y и обозначается $A^{-1}y$ xx/. Для точки $y=0$ множество $A^{-1}y$ есть некоторое подпростратсво $R_0\subset X$, которое называется ядром отображения A и обозначается $\operatorname{Ker} A$ xxx/. Для любой другой точки $y\in \operatorname{Im} A$ полным прообразом служит сдвиг подпространства R_0 на некоторый вектор (в силу известной теоремы: общее решение неоднородной линейной системы есть сумма частного решения этой системы и общего решения однородной

---

x/ Image – образ (англ.)

xx/ Это только обозначение. Оператор A^{-1} в описываемой ситуации, вообще говоря, не существует.

xxx/ Kernel – ядро (англ.)

системы). Таким образом, полные прообразы разных точек y суть линейные многообразия одинаковой размерности. Спрашивается, какова эта размерность ? Как описать эти линейные многообразия в координатах x_j ?

В линейной алгебре даются ответы на оба поставленных вопроса. Именно: подпространство $R = \mathrm{Im}\, A$ порождается столбцами матрицы $A \equiv \|a_{ij}\|$; размерность подпространства R равна максимальному числу линейно независимых столбцов матрицы A, т.е. равна ее рангу. Подпространство $R_0 = \mathrm{Ker}\, A$ есть пространство решений однородной линейной системы

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = 0 \qquad i = 1, \dots, m \tag{2}$$

Его размерность равна $n - r$, где r – ранг матрицы A.

Пусть для определенности базисный минор матрицы A располагается в ее левом углу, занимая первые r строк и первые r столбцов. Тогда каждая строка матрицы A, начиная с $(r+1)$-й, линейно выражается через предыдущие r строк, что может быть записано системой равенств

$$a_{sj} = C_{s1} a_{1j} + \dots + C_{sr} a_{rj}, \quad (s = r+1, \dots, m) \tag{3}$$

где постоянные $C_{s1}, \dots, C_{sr}$ определены однозначно. Отсюда следует, что величины $y_1, \dots, y_m$ связаны зависимостями

$$y_s = C_{s1} y_1 + \dots + C_{sr} y_r, \quad (s = r+1, \dots, m) \tag{4}$$

С другой стороны, если даны величины $y_1, \dots, y_m$, связанные зависимостями (4), то найдутся значения $x_1, \dots, x_n$, удовлетворяющие, вместе с имеющимися y_i, соотношениям (1). Для доказательства можно положить $x_{r+1} = \dots = x_n = 0$, а $x_1, \dots, x_r$ определить из r первых уравнений системы (1); таким образом, имеющимися y_j и найденными x_j удовлетворятся первые r уравнений системы (1), а тогда, в силу формул (3), удовлетворятся и остальные $m - r$ уравнений. Таким образом, соотношения (4) дают полное описание подпространства $R \subset Y$. Уравнения (2) в свою очередь дают полное описание подпространства $R_0 \subset X$. Но можно записать их и в несколько ином виде, более полезным для дальнейшего, проведя разрешение

относительно аргументов $x_1, \dots, x_r$. При этом достаточно разрешить по правилам Крамера первые r уравнений системы (2) - остальные будут выполняться автоматически. Мы получим формулы вида

$$x_j = B_{j\,r+1} x_{r+1} + \dots + B_{jn} x_n, \quad j = 1, \dots, r \tag{5}$$

с однозначно определенными коэффициентами $B_{j,r+1}, \dots, B_{jn}$.

6. Теперь поставим соответствующие вопросы для произвольной дифференцируемой функции $y = f(x)$, действующей из области $G \subset X = R_n$ в пространство $Y = R_m$. В координатной форме функция $y = f(x)$ записывается системой уравнений вида

$$y_i = f_i(x_1, \dots, x_n), \quad (i = 1, \dots, m)$$

где функции $f_i(x)$ определены, непрерывны и обладают непрерывными частными производными в области G. Мы ставим следующие вопросы. Какова размерность образа некоторой окрестности точки $a \in G$? Какими уравнениями в координатах y_i описывается этот образ? Какова размерность полного прообраза точки $b = f(a)$? Какими уравнениями в координатах x_j описывается этот прообраз? Размерность, о которой идет речь, мы понимаем в следующем смысле: будет показано, что искомые множества описываются с помощью некоторого числа C^1 функций от определенного числа независимых вещественных параметров; это-то число требуемых параметров мы и будем считать размерностью искомого множества.

Ответы на все эти вопросы мы дадим в предположении, что ранг матрицы Якоби

$$f'(x) \equiv \begin{Vmatrix} \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1}, & \dots, & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_n} \\ \dots & & \\ \frac{\partial f_m(x)}{\partial x_1}, & \dots, & \frac{\partial f_m(x)}{\partial x_n} \end{Vmatrix}$$

имеет постоянное значение r в некоторой окрестности U точки a.

Вообще говоря, ранг матрицы Якоби изменяется от точки к точке; если рассмотреть точку a_0, в которой ранг матрицы

Якоби достигает максимального значения, положим r_0, то по соображениям непрерывности минор порядка r_0, отличный от нуля в точке a_0, будет отличным от нуля и в некоторой ее окрестности. Таким образом, условие постоянства ранга в окрестности точки a для некоторых точек $a \in G$ заведомо выполняется.

Без ограничения общности можно считать, что базисный минор матрицы $f'(x)$ при всех $x \in U$ располагается в ее левом верхнем углу, поскольку в самой точке a этого можно достигнуть, заново перенумеровав координаты в R_n и R_m, а из соображений непрерывности матрицы Якоби следует, что левый верхний минор остается базисным (т.е. его значение остается отличным от нуля) и в некоторой окрестности точки a.

Т е о р е м а о р а н г е. В указанных предположениях:

(1) Для некоторой окрестности $U \ni a$ множество всех значений функции $f(x)$ в некоторой окрестности точки $b = f(a)$ описывается системой уравнений вида

$$y_s = \varphi_s(y_1, \ldots, y_r), \qquad s = r+1, \ldots, m,$$

с функциями $\varphi_{r+1}, \ldots, \varphi_m$ класса C^1 и определяется, таким образом, r свободными параметрами $y_1, \ldots, y_r$.

(2) Существует такая окрестность V точки b, что в каждую точку множества $\operatorname{Im} f \cap V$ отображается множество точек x, описываемое в пределах окрестности U системой уравнений вида

$$x_j = \psi_j(x_{r+1}, \ldots, x_n) \qquad j = 1, \ldots, r$$

где ψ_j – функции класса C^1; оно определяется таким образом, $n - r$ свободными параметрами $x_{r+1}, \ldots, x_n$.

Доказательство теоремы о ранге будет дано в 2.23.

2.22. А б с т р а к т н а я т е о р е м а о р а н г е.

Пусть X и Y – полные нормированные пространства, представленные в виде прямых сумм замкнутых подпространств: $X = X_1 + X_2$, $Y = Y_1 + Y_2$. Для всякого $x \in X$ и $y \in Y$ имеются однозначно определенные разложения $x = x_1 + x_2$, $x_1 \in X_1$, $x_2 \in X_2$, $y = y_1 + y_2$, $y_1 \in Y_1$, $y_2 \in Y_2$. Каждую функцию $y = f(x) : X \to Y$ можно записать эквивалентным образом в виде пары уравнений

$$y_1 = \mathcal{F}_1(x) \equiv \mathcal{F}_1(x_1, x_2) : X \to Y_1$$

$$y_2 = \mathcal{F}_2(x) \equiv \mathcal{F}_2(x_1, x_2) : X \to Y_2$$

Производной $f'(x)$ соответствует матрица из операторов

$$f'(x) \equiv \begin{Vmatrix} \dfrac{\partial \mathcal{F}_1(x)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial \mathcal{F}_1(x)}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial \mathcal{F}_2(x)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial \mathcal{F}_2(x)}{\partial x_2} \end{Vmatrix}$$

где $\dfrac{\partial \mathcal{F}_i(x)}{\partial x_j}$ действует из X_j в Y_i $(i, j = 1, 2)$.

Фиксируем точки $a = a_1 + a_2$, $b = b_1 + b_2 = f(a) \in Y$

Т е о р е м а. Пусть функция $f(x)$ – класса C^1 в области $G \subset X$, содержащей точку a, и удовлетворяет следующим условиям:

(1) Из $\mathcal{F}_1'(x)h = 0$ следует $\mathcal{F}_2'(x)h = 0$

(2) $\dfrac{\partial \mathcal{F}_1(a)}{\partial x_1}$ есть обратимое отображение X_1 на Y_1

Тогда существуют такие окрестности $U(a) \subset X$, $V(b_1) \subset Y_1$, $W(a_2) \subset X_2$, что

(а) при $x \in U(a)$ и $y_1 \in V(b_1)$ годограф функции $y = f(x)$ может быть задан уравнением $y_2 = \varphi(y_1)$;

(б) для каждого $y \in f(U)$ полный прообраз $f^{-1}(y)$ при $x_2 \in W(a_2)$ может быть задан уравнением $x_1 = \psi(x_2)$

Здесь φ и ψ – функции, обладающие в указанных окрестностях непрерывными производными по своим аргументам. Если для функции $y = f(x)$ выполняются условия теоремы для точки $(a, b) \in X \times Y$ (т.е. если существуют прямые разложения $X = X_1 + X_2$, $Y = Y_1 + Y_2$ со всеми указанными свойствами), то точка (a, b) называется обыкновенной точкой отображения $f(x)$; если же эти условия не выполняются (т.е. таких прямых разложений не существует), то точка (a, b) называется особой точкой отображения $f(x)$. (Иногда в литературе названия "особая точка", "обыкновенная точка" относят только к точке

$b \in Y$ – что, разумеется, не вполне правильно).

Доказательство теоремы. Рассмотрим функцию $\Phi(y_1, x_1, x_2) = F_1(x_1, x_2) - y_1 \quad (B \times Y_1 \to Y_1)$. Очевидно, что $\Phi(b_1, a_1, a_2) = 0$, а оператор $\frac{\partial \Phi(b_1, a_1, a_2)}{\partial x_1} = \frac{\partial F_1(a)}{\partial x_1}$ $(X_1 \to Y_1)$ обратим. По теореме о неявной функции 2.12 существуют такие окрестности $U(b_1) \subset Y_1$, $W(a_2) \subset X_2$, $W(a_1) \subset X_1$ и такая функция $g(x_2, y_1) : W(a_2) \times V(b_1) \to W(a_1)$ имеющая непрерывные производные, что уравнение $F_1(x_1, x_2) - y_1 = 0$ эквивалентно уравнению $x_1 = g(x_2, y_1)$. Другими словами,

$$F_1(g(x_2, y_1), x_2) = y_1 \tag{1}$$

Положим $U(a) = W(a_1) \times W(a_2) \cap \{x : F_1(x) \in V(b_1)\}$

Теперь уравнение

$$y_2 = F_2(x_1, x_2)$$

при $x \in U(a)$ можно записать в виде

$$y_2 = F_2(g(x_2, y_1), x_2) \tag{2}$$

Покажем, что правая часть не зависит от x_2. Дифференцируя (1) и (2) по x_2, получаем

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial g}{\partial x_2} + \frac{\partial F_1}{\partial x_2} = 0 \tag{3}$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial g}{\partial x_2} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} = \frac{\partial y_2}{\partial x_2} \tag{4}$$

Из (3) видно, что результат применения оператора $\frac{\partial F_1(x)}{\partial x}$ к вектору $\left\{\frac{\partial g}{\partial x_2} h_2, h_2\right\}$ равен 0 при любом $h_2 \in X_2$. Но тогда в силу предположения (I), и результат применения оператора $\frac{\partial F_2(x)}{\partial x}$ к этому же вектору равен 0; таким образом, $\frac{\partial y_2}{\partial x_2} = 0$ и правая часть (2) не зависит от x_2. Поэтому уравнение (2) при $y_1 \in V(b_1)$ можно записать в виде

$$y_2 = \varphi(y_1),$$

причем функция $\varphi(y_1)$ имеет непрерывную производную, так как этим свойством обладают функции F_2 и g. Утверждение (а) доказано.

Рассмотрим теперь полный прообраз точки $y = \{y_1, y_2\} = f(x) \in f(U)$. Но если задано даже только значение y_1, то в указанной выше окрестности $W(a_2) \times V(b_2)$ однозначно определяется по x_2 и величина $x_1 = g(x_2, y_1)$, которая при фиксированном y_1 представляет собою функцию от $x_2 \in W(a_2)$, обладающую непрерывной производной.

Теорема доказана.

2.23а. Доказательство теоремы о ранге.

В условии этой теоремы была задана C^1 функция $y = f(x)$ $(G \subset R_n \to R_m)$, или в координатной форме

$$y_i = f_i(x_1, \ldots, x_n) \qquad (i = 1, \ldots, m)$$

Было предположено, что ранг матрицы Якоби

$$\begin{Vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{Vmatrix}$$

равен постоянному числу r в окрестности U точки $a \in R_n$ и что базисный минор этой матрицы располагается в ее первых r строках и первых r столбцах.

Мы получим теорему о ранге как следствие из 2.22. Положим в 2.22 $X = R_n$, $Y = R_m$. Далее определим подпространство $Y_1 \subset Y = R_m$ первыми r базисными векторами пространства R_m, а подпространство Y_2 – последними $m - r$ базисными векторами. Тогда равенство $\frac{\partial F_1(x)}{\partial x} h = 0$ равносильно системе уравнений

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} h_j = 0 \qquad (i = 1, \ldots, r) \tag{1}$$

а равенство $\frac{\partial F_2(x)}{\partial x} h = 0$ – системе уравнений

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} h_j = 0 \qquad (i = r+1, \ldots, m) \tag{2}$$

Но так как строки матрицы $f'(x)$, начиная с $(r+1)$-й, линейно зависят от предыдущих, равенства (2) оказываются следствиями равенств (1). Таким образом, выполнена предпосылка (1)

теоремы 2.22. Определим далее подпространство $X_1 \subset X = R_n$ первыми r базисными векторами пространства R_n и подпространство X_2 – последними $n-r$ базисными векторами. Тогда оператор $\frac{\partial F_1(a)}{\partial x_1}$ задается матрицей

$$\left\| \begin{matrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f_1}{\partial x_r} \\ \dots \\ \frac{\partial f_r}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f_r}{\partial x_r} \end{matrix} \right\|$$

с определителем, отличным от нуля, и, следовательно, обратим; таким образом, выполнена и предпосылка (2) теоремы 2.22. Нам остается сформулировать результат этой теоремы для данного случая. Он гласит: существуют такие окрестности $V(a) \subset R_n$, $V(b_1) \subset Y_1 = R_r$, $W(a_2) \subset X_2 = R_{n-r}$ что при $x \in U(a)$ и $(y_1, \dots, y_r) \in V(b_1)$ годограф функции $y = f(x)$ может быть задан уравнениями

$$y_{r+1} = \varphi_{r+1}(y_1, \dots, y_r), \dots, \quad y_m = \varphi_m(y_1, \dots, y_r);$$

для каждого $y \in f(U)$ полный прообраз $f^{-1}(y)$ при $\{x_{r+1}, \dots, x_n\} \in W(a_2)$ может быть задан уравнениями

$$x_1 = \psi_1(x_{r+1}, \dots, x_n), \dots, \quad x_r = \psi_r(x_{r+1}, \dots, x_n),$$

где φ_i и ψ_j – функции, обладающие в указанных окрестностях непрерывными производными по своим аргументам.

Но это и есть требуемые утверждения теоремы 2.21; таким образом, она оказывается полностью доказанной.

6. Известное из линейной алгебры понятие линейной зависимости векторов (числовых строк, линейных форм и пр.) может быть обобщено на функции следующим образом.

Пусть в области $G \subset R_n$ определена C^1 функция $y = f(x): G \to R_m$, так что все составляющие

$$y_i(x) = f_i(x_1, \dots, x_n), \quad i = 1, \dots, m \tag{3}$$

обладают непрерывными частными производными по $x_1, \dots, x_n$.

Предположим далее, что ранг r матрицы Якоби

$$f'(x) \equiv \left\| \begin{matrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \dots & & \dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{matrix} \right\|$$

постоянен в области G. Если при этом $r = m$, функции $f_1(x), \dots, f_m(x)$ называются (функционально) независимыми в G; если $r < m$, функции эти называются (функционально) зависимыми в G. Теорема о ранге 2.21 позволяет дать описание геометрических свойств независимых и зависимых функций.

Теорема. Если функции $f_1(x), \dots, f_m(x)$ функционально зависимы в G, то существует у каждой точки $a \in G$ такая окрестность $U(a)$ и такая C^1 функция $F(y_1, \dots, y_m)$, определенная в некоторой окрестности точки $b = f(a) \in R_m$, что $\operatorname{grad} F(b) \neq 0$ и

$$F[f_1(x), \dots, f_m(x)] \equiv 0 \quad \text{в } U(a) \tag{4}$$

Если функции $f_1(x), \dots, f_m(x)$ функционально независимы в G, то ни у какой точки $a \in G$ окрестности с описанными свойствами не существует.

Доказательство. Если функции $f_1(x), \dots, f_m(x)$ зависимы, т.е. $r < m$, то по теореме о ранге на годографе отображения $f(x)$ в некоторой окрестности $V(b)$ точки $b = f(a)$ выполняются уравнения

$$y_s = \psi_s(y_1, \dots, y_r), \quad s = r+1, \dots, m$$

с C^1 функциями $\psi_s(y)$ $(s = r+1, \dots, m)$. Для той окрестности $U(a)$, которую отображение $y = f(x)$ переводит в $V(b)$, выполняется равенство (при любом $s = r+1, \dots, m$)

$$F[f_1(x), \dots, f_m(x)] \equiv f_s(x) - \psi_s(f_1(x), \dots, f_r(x)) \equiv 0$$

причем $F[y_1, \dots, y_m] \equiv y_s - \psi_s(y_1, \dots, y_r)$ принадлежит классу C^1 и имеет ненулевой градиент.

Заметим, что равенство (3) в соединении с условием $\operatorname{grad} F(b) \neq 0$ показывает, что функция $y = f(x)$ отображает любую окрестность точки a не на всю окрестность точки

$b=f(a)$, заведомо не попадают в образ точки, находящиеся по направлению $\operatorname{grad} F(b)$ как угодно близко от b. А так как при $r=m$ по теореме о ранге для функции $y=f(x)$ образ любой окрестности точки $a\in G$ покрывает некоторую окрестность точки $b=f(a)$, то при $r=m$ функции $f_1(x)$, $\ldots, f_m(x)$ не могут быть зависимыми. Теорема доказана.

Так, функции $f_1(x),\ldots,f_m(x)$, осуществляющие диффеоморфизм области G на $f(G)$, являются независимыми, так как здесь матрица $f'(x)$ не вырождена, $r=m=n$. Обратное верно в несколько ослабленной форме: если $r=m=n$, то функции $f_1(x),\ldots,f_n(x)$ осуществляют диффеоморфизм некоторой окрестности $U(a)$ любой точки $a\in G$ на соответствующую окрестность точки $f(a)\in f(G)$. Если при этом отображение $y=f(x)$ взаимно однозначно (с G на $f(G)$), то функции $f_1(x),\ldots,f_n(x)$ осуществляют диффеоморфизм G на $f(G)$.

в. Отметим одно простое, но важное следствие зависимости и независимости функций.

Теорема. Пусть функции $f_i(x)$ $(i=1,\ldots,m)$, составляющие отображения $y=f(x): R_n\to R_m$ функционально зависимы (независимы) в области $G\subset R_n$. Пусть $x=\pi(\xi)$ любой диффеоморфизм области G, и $\eta=\omega(y)$ любой диффеоморфизм области $f(G)$. Тогда функции $g_i(\xi)$, составляющие отображения

$$g(\xi)=\omega\{f[\pi(\xi)]\}$$

также функционально зависимы (независимы) в области $\pi^{-1}(G)$.

Доказательство вытекает из того, что ранг матрицы не меняется при ее умножении на невырожденную матрицу; в частности

$$\operatorname{rang}\|g'(\xi)\|=\operatorname{rang}\|\omega'(y)\cdot f'(x)\cdot\pi'(\xi)\|=\operatorname{rang}\|f'(x)\|.$$

2.24. Мы рассмотрим сейчас некоторые частные случаи теоремы о ранге 2.22, получающиеся при вырождении разложений $X=X_1+X_2$ или $Y=Y_1+Y_2$.

а. Допустим, что условия теоремы 2.22 выполняются при $X_1=X$, $X_2=0$. В этом случае матрица оператора становится одностолбцовой:

$$f'(x) = \left\| \begin{matrix} f_1'(x) \\ f_2'(x) \end{matrix} \right\|$$

Здесь оператор $f_1'(a)$ обратим; поэтому из $f_1'(x)h = 0$ $(x \in U(a),\ h \in X)$ следует, что $h = 0$ и, следовательно, также $f_2'(x)h = 0$. Таким образом, условие (2) в 2.22 следует из (I). Теорема 2.22 утверждает здесь, что годограф функции $y = f(x)$ может быть записан (в окрестности точки $b = f(a)$) C^1 уравнением $y_2 = \psi(y_1)$; поверхности уровня функции $f(x)$ в окрестности точки a оказываются отдельными точками, поскольку по данному $y = y_1 + y_2$ и даже только по y_1 однозначно определяется соответствующая точка x, как результат применения функции, обратной к $f_1(x)$.

б. Допустим, что условия теоремы 2.22 выполняются при $Y_1 = Y$, $Y_2 = 0$. В этом случае матрица оператора $f'(x)$ становится однострочной:

$$f'(x) = \left\| \frac{\partial f(x)}{\partial x_1},\ \frac{\partial f(x)}{\partial x_2} \right\|$$

Здесь оператор $\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_1}$ обратим. Второе условие в 2.22 становится излишним. Теорема 2.22 утверждает здесь, что каждая поверхность уровня функции $f(x)$ может быть записана (в окрестности точки a) в виде $x_1 = \varphi(x_2)$ с C^1 функцией $\varphi(x_2)$; значения функции $f(x)$, принимаемые ею в любой окрестности $U(a)$ точки a, покрывают целую окрестность точки $b = f(a)$ в виду обратимости функции $f(x)$ на пересечении $U(a)$ с X_1.

в. В случае б. можно не требовать наличия разложения $X = X_1 + X_2$ со свойствами, указанными в условии теоремы 2.22. Достаточно, чтобы существовало подпространство $X_1 \subset X$, на котором оператор $\dfrac{\partial f(a)}{\partial x_1}$ был бы обратимым; тогда можно доказать, что существует подпространство $X_2 \subset X$ такое, что X есть (нормированная) прямая сумма X_1 и X_2; подпространство X_2 можно даже выбрать так, что оператор

$\frac{\partial f(a)}{\partial x_2}$ будет нулевым оператором. Все это вытекает из следующей леммы:

Л е м м а. Допустим, что сужение линейного непрерывного оператора $A: X \to Y$ на некоторое подпространство $X_1 \subset X$ представляет собой обратимое отображение A_1 подпространства X_1 на все пространство Y. Тогда существует подпространство $X_2 \subset X$ дающее в нормированной прямой сумме с X_1 все X и такое, что на X_2 оператор A действует как нулевой оператор.

Доказательство. Обозначим обратный оператор к оператору A_1 через A_1^{-1}; A_1^{-1} действует из Y в X_1 и при этом для любого $x_1 \in X_1$ имеем $A_1^{-1}A_1 x_1 = A_1^{-1}Ax_1 = x_1$, и для любого $y \in Y$, $A_1 A_1^{-1} y = A A_1^{-1} y = y$. Теперь положим

$$X_2 = \{ x \in X;\ Ax = 0 \}.$$

Очевидно, X_2 есть подпространство в X. Покажем, что оно не имеет с X_1 общих элементов, кроме 0. Пусть $x_0 \in X_1 \cap X_2$ тогда из $x_0 \in X_1$ следует, что $x_0 = A_1^{-1}A_1 x_0 = A_1^{-1}Ax_0$, но из $x_0 \in X_2$ следует, что $Ax_0 = 0$, так что и $x_0 = 0$. Далее, для любого $x \in X$ имеем $Ax = y \in Y$ положим $x_1 = A_1^{-1} y \in X_1$, так что $y = A_1 x_1 = Ax_1$; мы получим, что $Ax = Ax_1$, откуда для $x_2 = x - x_1$ выполняется равенство $Ax_2 = Ax - Ax_1 = 0$, так что $x_2 \in X_2$. Мы видим, что для каждого $x \in X$ существует разложение $x = x_1 + x_2$ $x_1 \in X_1$, $x_2 \in X_2$. Покажем, что составляющие x_1 и x_2 непрерывно зависят от x. Действительно, по построению $x_1 = A_1^{-1}Ax$ есть непрерывная функция от x ввиду непрерывности операторов A и A_1^{-1}; но тогда и $x_2 = x - x_1$ есть также непрерывная функция от x, что и завершает доказательство.

Возвращаясь к функции $f(x)$, мы получаем доказательство сформулированного выше результата о существовании подпространства X_2, дающего в прямой сумме с X_1 все X, и такого, что на X_2 оператор $\frac{\partial f(a)}{\partial x_2}$ является нулевым. Это последнее означает, что для функции $x_1 = \varphi(x_2)$, представляющей поверхность уровня функции $f(x)$, и проходящей через точку $a = (a_1, a_2)$, $(a_1 \in X_1,\ a_2 \in X_2)$ при таком выборе подпространства X_2 имеем

$$\varphi'(a_2) = -\left[\frac{\partial f(a)}{\partial x_1}\right]^{-1}\left[\frac{\partial f(a)}{\partial x_2}\right] = 0 \qquad (I)$$

2.25. Проблема эквивалентности.

а. Вопрос о локальной структуре дифференцируемой функции имеет еще один важный аспект; как и в 2.2Iа, мы рассмотрим вначале случай линейной функции $y = f(x) : X \to R_n \to Y = R_m$, записываемой уравнениями

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ , \quad i = 1, \ldots, m \qquad (I)$$

Пусть в пространствах X и Y разрешено перейти к новым координатам с помощью невырожденных линейных преобразований; спрашивается, к какому простейшему виду можно будет тогда привести уравнения (I) ?

Для ответа мы вновь предположим, что ранг системы (I) равен r и базисный минор матрицы $A = \| a_{ij} \|$ лежит в ее верхнем левом углу. Тогда, как мы видели, между величинами $y_1, \ldots, y_m$ имеются связи, описываемые уравнениями 2.2I (4);

$$y_s = C_{s1} y_1 + \ldots + C_{sr} y_r \qquad (s = r+1, \ldots, m) \qquad (2)$$

В пространстве X введем новые кооординаты $\xi_1, \ldots, \xi_n$ по формулам

$$\left.\begin{aligned} \xi_1 &= a_{11} x_1 + \ldots + a_{1r} x_r + \ldots + a_{1n} x_n \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \xi_r &= a_{r1} x_1 + \ldots + a_{rr} x_r + \ldots + a_{rn} x_n \\ \xi_{r+1} &= x_{r+1} , \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \xi_n &= x_n . \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Величины $\xi_1, \ldots, \xi_n$ действительно могут служить новыми координатами, так как детерминант системы (3), очевидно, равен базисному минору матрицы A и тем самым отличен от нуля. В пространстве Y введем новые координаты $\eta_1, \ldots, \eta_m$ по формулам

$$\left.\begin{aligned} \eta_1 &= y_1 \\ &\dots\dots\dots \\ \eta_r &= \qquad\qquad y_r \\ \eta_{r+1} &= -c_{r+1,1}y_1 - c_{r+1,r}y_r + y_{r+1} \\ &\dots\dots\dots \\ \eta_m &= -c_{m,1}y_1 - c_{mr}y_r + \dots + y_m \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Детерминант этой системы равен I, и величины $\eta_1, \dots, \eta_m$ действительно могут служить новыми координатами в пространстве Y. Равенства (I) с учетом (2) приводятся теперь к виду

$$\left.\begin{aligned} \eta_1 &= \xi_1 \\ \eta_r &= \qquad \xi_r \\ \eta_{r+1} &= \qquad\quad 0 \\ &\dots\dots\dots \\ \eta_m &= \qquad\qquad 0 \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Очевидно, это и есть наиболее простой вид, в котором можно записать линейное преобразование (I) переходом к новым кооординатам в пространствах X и Y.

6. Рассмотрим аналогичный вопрос для дифференцируемой функции $y = f(x)$, действующей из $G \subset X = R_n$ в $Y = R_m$. В координатной форме функция $f(x)$ записывается системой уравнений

$$y_i = f_i(x_1, \dots, x_n) \qquad (i = 1, \dots m) \qquad (6)$$

Спрашивается, к какому простейшему виду можно привести функцию $y = f(x)$, если в окрестности данной точки $a \in G$ и в окрестности точки $b = f(a)$ разрешено переходить к новым координатам с помощью подходящих диффеоморфизмов.

Для ответа будем предполагать выполненными условия теоремы о ранге 2.21б. В пространстве X введем новые координаты по формулам

$$\left.\begin{aligned} \xi_1 &= f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \xi_r &= f_r(x_1, \dots, x_n) \\ \xi_{r+1} &= x_{r+1} \\ &\dots\dots \\ \xi_n &= x_n \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

Величины $\xi_1, \dots, \xi_n$ действительно могут служить новыми координатами в некоторой окрестности точки a, так как якобиан $\frac{\partial(\xi_1, \dots, \xi_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}$ равный базисному минору матрицы A, в точке a по условию отличен от нуля. В силу теоремы о ранге 2.21б между величинами $y_1, \dots, y_m$ в некоторой окрестности $V_0(b)$ точки $b = f(a)$ имеются соотношения

$$y_s = \varphi_s(y_1, \dots, y_r), \quad s = r+1, \dots, m \qquad (8)$$

Введем величины

$$\left.\begin{aligned} \eta_1 &= y_1 \\ \eta_r &= y_r \\ \eta_{r+1} &= -\varphi_{r+1}(y_1, \dots, y_r) + y_{r+1} \\ &\dots\dots \\ \eta_m &= -\varphi_m(y_1, \dots, y_r) + y_m \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

Здесь $\frac{\partial(\eta_1, \dots, \eta_m)}{\partial(y_1, \dots, y_m)} = 1$ и поэтому величины $\eta_1, \dots, \eta_m$ можно принять за новые координаты в некоторой окрестности $V_1(b)$. Теперь равенства (5) могут быть переписаны, с учетом (7), в виде

$$\left.\begin{aligned} \eta_1 &= \xi_1 \\ \eta_r &= \xi_r \\ \eta_{r+1} &= 0 \\ &\dots\dots \\ \eta_m &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

Очевидно, это и есть наиболее простой вид, в котором может быть записана функция $y = f(x)$ с помощью обратимых дифференцируемых преобразований в окрестностях точек a и b.

в. Далее мы приведем теорему, обобщающую построения a и

δ на области в банаховом пространстве. В этой общей теореме нам, разумеется, придется отказаться от использования координат; обобщение будет основано на понятии эквивалентности двух отображений.

Пусть имеются банаховы пространства X, Y, Ξ, H и две дифференцируемые функции $y = \varphi(x): U \subset X \to V \subset Y$ и $\xi = \psi(\eta): M \subset \Xi \to N \subset H$. Пусть далее имеются диффеоморфизмы $\omega: U_0 \subset U \to M_0 \subset M$, $\omega(a) = \alpha$ и $\pi: V_0 \subset V \to N_0$, $\pi(b) = \beta$. Отображения φ и ψ называются эквивалентными, если для каждого $x \in U_0$ имеем

$$\pi\varphi(x) = \psi(\omega x) \qquad (11)$$

Иногда рисуют "диаграмму отображений"

$$\begin{array}{ccc} U_0 & \xrightarrow{\varphi} & V_0 \\ \omega \downarrow & & \downarrow \pi \\ M_0 & \xrightarrow{\psi} & N_0 \end{array}$$

Соотношение (11) можно трактовать, как своеобразную "коммутативность" этой диаграммы: из любой точки $x \in U_0$ путь по стрелкам φ и π приводит к тому же результату в области N_0, что и путь по стрелкам ω и ψ. В конечномерном случае эквивалентность отображений φ и ψ равносильна возможности перехода от φ к ψ с помощью дифференцируемого обратимого преобразования кооординат в некоторой окрестности $U_0 \subset U$ и в некоторой окрестности $V_0 \subset V$.

г. Установим следующую теорему эквивалентности:

Теорема. В условиях теоремы 2.22 существуют такие окрестности $U_0 \subset U(a)$ и $V_0 \subset V(b)$, что (в этих окрестностях) отображение $y = f(x)$ эквивалентно отображению $\psi: M_0 \subset \Xi = Y_1 + X_2 \to N_0 \subset H = Y_1 + Y_2$, действующему по формуле $\psi(y_1, x_2) = (y_1, 0)$

Доказательство. Рассмотрим отображения

$$\omega(x_1, x_2) = (F_1(x_1, x_2), x_2): U \subset X \to \Xi$$

$$\pi(y_1, y_2) = (y_1, -\varphi(y_1) + y_2): V \subset Y \to H$$

Операторная матрица отображения $\frac{d\omega}{dx}$ имеет вид

$$\left\| \begin{matrix} \dfrac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial x_2} \\ 0 & E_2 \end{matrix} \right\|$$

и так как $\dfrac{\partial \mathcal{F}_1(a)}{\partial x_1}$ по условию обратимо, то $\dfrac{d\omega(a)}{dx}$ также обратимо (I.I4к). Поэтому, согласно теореме об обратной функции 2.I7, отображение ω есть диффеоморфизм некоторой окрестности $\mathcal{U}_0(a) \subset \mathcal{U}$ на некоторую окрестность $M_0 \subset \Xi$.

Аналогично, операторная матрица отображения $\dfrac{d\pi}{dy}$ имеет вид

$$\left\| \begin{matrix} E_1 & 0 \\ -\varphi'(y_1) & E_2 \end{matrix} \right\|$$

откуда, по I.I4к, оператор $\dfrac{d\pi}{dy}$ оказывается также обратимым. Значит, и отображение π является диффеоморфизмом некоторой окрестности $V_0(b) \subset V$ на некоторую окрестность $N_0 \subset H$.

Положим $\psi(y_1, x_2) = (y_1, 0)$. Покажем, что для любого $x \in \mathcal{U}_0(a)$ выполняется соотношение $\pi f(x) = \psi(\omega x)$.

Действительно, из $\omega(x) = (\mathcal{F}_1(x_1, x_2), x_2)$ следует, что

$$\psi(\omega(x)) = (\mathcal{F}_1(x_1, x_2), 0);$$

с другой стороны, из $f(x) = (\mathcal{F}_1(x_1, x_2), \mathcal{F}_2(x_1, x_2))$ следует, что $y_2 = \varphi(y_1)$; поэтому

$$\pi f(x) = (\mathcal{F}_1(x_1, x_2), 0) = \psi(\omega(x)).$$

Тем самым, отображения f и ψ оказываются эквивалентными, и теорема доказана.

2.26. Особые точки. Мы рассмотрим в этом пункте поведение функции $y = f(x)$ в окрестности ее особой точки в нескольких простейших случаях.

а. Пусть функция $y = f(x)$ есть вещественная функция вещественного переменного x, $\alpha \le x \le \beta$. В обыкновенной точке (a, b) согласно общему определению 2.22, имеем $f'(a) \ne 0$, и функция $f(x)$ отображает окрестность точки a

на окрестность точки b . (рис. I.6-I).

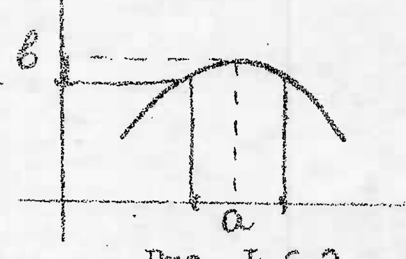


Рис.I.6-I

В особой точке $f'(a)=0$ и отображения окрестности точки a на окрестность точки b в общем случае уже нет, как видно из рис. I.6-2.

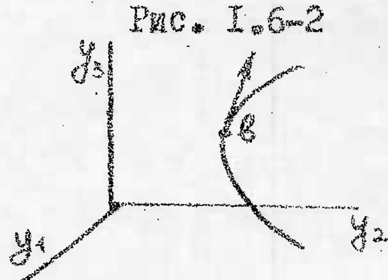


Рис. I.6-2

6. Пусть теперь $y=f(x)$, попрежнему функция вещественного $x \in [\alpha, \beta]$, принимает значения в пространстве R_n. В обыкновенной точке (a, b) имеем $f'(a) \neq 0$, так что у кривой Γ, годографа функции $f(x)$ имеется в точке b определенная касательная (рис. I.6-3). В особой точке $f'(a)=0$ и о касательной сказать ничего нельзя. Здесь может помочь привлечение высших производных функции $f(x)$, существование которых мы сейчас предположим. В общем случае векторы $f'(a)$ и $f''(a)$ линейно независимы

Рис. I.6-3

Из формулы Тейлора для $\Delta f(x)$

$$\Delta f = f'(a)\Delta x + f''(a)\frac{\Delta x^2}{2} + o(x^2)$$

видно, что кривая Γ с точностью до малых 2-го порядка лежит в плоскости, натянутой на векторы $f'(a)$ и $f''(a)$. Если ξ, η – координаты в этой плоскости относительно базиса $f'(a)$, $f''(a)/2$, то параметрическое представление кривой с точностью до малых 2-го порядка имеет вид

$$\xi = \Delta x \;, \quad \eta = (\Delta x)^2$$

Мы получаем параболу, изображенную на рис. I.6-4.

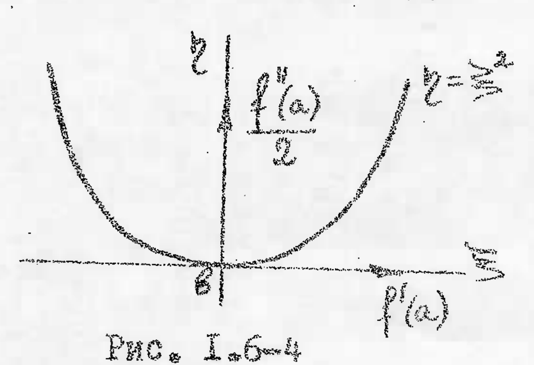


Рис. I.6-4

Более точное представление о ходе кривой мы получим, привлекая и третью производную. Здесь мы получаем

$$\Delta f = f'(a)\Delta x + \frac{1}{2} f''(a)(\Delta x)^2 + \frac{1}{6} f'''(a)(\Delta x)^3 + o((\Delta x)^3)$$

Считая $\frac{1}{6} f'''(a)$ линейно независимым от $f'(a)$ и $f''(a)$ и обозначая соответствующую координату в трехмерном пространстве с базисом $f'(a)$, $\frac{1}{2} f''(a)$, $\frac{1}{6} f'''(a)$ через ζ, получаем параметрическое представление кривой Γ с точностью до малых третьего порядка

$$\xi = \Delta x, \quad \eta = (\Delta x)^2, \quad \zeta = (\Delta x)^3$$

Ее проекция на плоскость $f'(a)$, $\frac{1}{2} f''(a)$ (вид с вершины вектора $\frac{1}{6} f'''(a)$) есть указанная выше парабола (рис. I.6-5).

Ее проекция на плоскость $\frac{1}{2} f''(a)$, $\frac{1}{6} f'''(a)$ есть кривая с параметрическим уравнением

$\eta = (\Delta x)^2$, $\zeta = (\Delta x)^3$, или $\zeta = \eta^{3/2}$

(полукубическая парабола).

Все это относилось к обыкновенной точке кривой Γ.

Рассмотрим теперь расположение кривой Γ в окрестности ее особой точки. В особой точке мы имеем $f'(a) = 0$. Предположим, что векторы $f''(a)$ и $f'''(a)$ линейно независимы.

Рис. I.6-5

Рис. I.6-6

Формула Тейлора дает нам

$$\Delta f = f''(a)\frac{(\Delta x)^2}{2} + f'''(a)\frac{(\Delta x)^3}{6} + o(\Delta x^3)$$

так что кривая Γ с точностью до малых третьего порядка лежит в плоскости, натянутой на векторы $f''(a)/2$ и $f'''(a)/6$ и имеет там вид, изображенный на рис. I.6-6. Но в то время, как в обыкновенной точке у кривой Γ рис. I.6-6 изображает только проекцию кривой и на самом деле у нее заострения нет, в особой точке у кривой Γ - в общем случае - фактически имеется заострение. Привлечение следующей производной и связанных с ней

малых четвертого порядка не спасает положения; малые четвертого порядка показывают отклонение кривой от плоскости $\frac{1}{2}f''(a)$, $\frac{1}{6}f'''(a)$, но заострение сохраняют (рис. I.6-7).

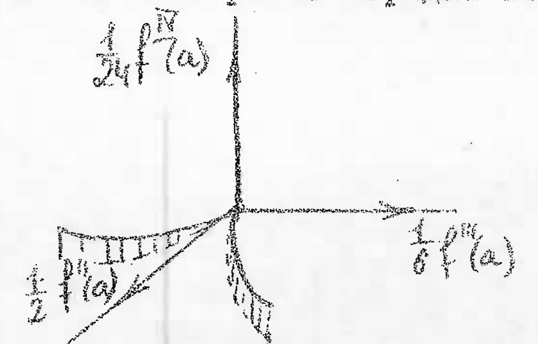


Рис. I.6-7

6. Пусть функция $y=f(x): G\subset X \to R_1$ имеет числовые значения. Если $(a, f(a))$ есть обыкновенная точка, то как мы видели, $\operatorname{grad} f(a)\neq 0$, следовательно, есть в пространстве X направления, по которым $f(x)$ в окрестности точки a меняется монотонно, так что область значений функции на оси R_1 заполняет целую окрестность точки $b=f(a)$. Если же $(a, f(a))$ есть особая точка, то $\operatorname{grad} f(a)=0$, так что приращение функции $f(x)$ при выходе из точки $x=a$ есть малая высшего порядка по сравнению с $|x-a|$.

Такая точка a называется стационарной точкой; мы встретим такие точки в теории экстремумов (§ 2.3).

В окрестности такой точки образ функции может не покрывать целую окрестность точки b, а, например, только лишь ее половину (рис. I.6-8).

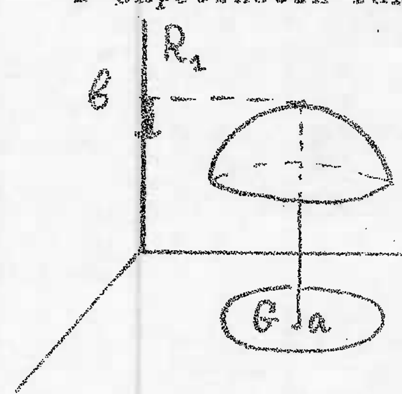


Рис. I.6-8

Теперь рассмотрим особую точку для отображения $y=f(x): R_n\to R_n$. Основным типом такой особой точки является складка.

Для начала рассмотрим конкретное отображение $y=f(x): R_2\to R_2$ задаваемое формулами

$$y_1=x_1, \quad y_2=x_2^2 \qquad (1)$$

и имеющее производную

$$f'(x) \equiv \begin{Vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2x_2 \end{Vmatrix}$$

Ранг этой матрицы равен 2 при $x_2 \neq 0$ и равен I при $x_2 = 0$ (т.е. на оси x_1). Отображение (I) всю плоскость $x = \{x_1, x_2\}$ переводит в верхнюю полуплоскость $y_2 \geq 0$, причем каждая точка $y = \{y_1, y_2\}$ этой полуплоскости с $y_2 > 0$ имеет ровно два прообраза $x_1 = y_1$, $x_2 = \pm\sqrt{y_2}$ находящихся соответственно в верхней и нижней полуплоскостях плоскости x . Более подробно рассмотрим вертикальную прямую $x_1 = const$, $-\infty < x_2 < +\infty$; когда точка $\{x_1, x_2\}$ спускается по этой прямой от $+\infty$ к $-\infty$, ее образ сначала спускается по вертикали $y = x_1$ от $y_2 = +\infty$ до точки $y_2 = 0$ и затем поднимается по той же прямой к $y_2 = +\infty$. Такое отображение, естественно, называется складкой.

Рассмотрим теперь общий случай отображения $y = f(x)$, $G \subset R_n \to R_n$. Пусть якобиан $J(x)$ отображения $f(x)$ в некоторой точке $a \in G$ равен нулю. Вообще говоря, характер отображения $f(x)$ в окрестности такой точки может быть весьма сложен; мы покажем сейчас, что при некоторых дополнительных предположениях отображение $f(x)$ имеет тип складки. Более точно, мы покажем, что если не только сами функции $f_i(x)$ имеют класс C^1 , но и все их производные $\frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j}$ также принадлежат к этому классу, так что, в частности, $J(x)$ есть также C^1 - функция, и если также $grad\, J(a) \neq 0$, и, более того, $grad\, J(a)$ не лежит в "градиентном подпространстве" пространства $X = R_n$ (определение будет сейчас дано), то при движении точки $x \in X$ по кривой, протыкающей поверхность $S = \{x \in X : J(x) = 0\}$ в пределах некоторой окрестности точки a , соответствующая точка $y = f(x)$ по некоторой линии доходит до поверхности $f(S) \subset Y = R_n$, а затем по этой же линии возвращается в обратную сторону.

Пусть отображение $y = f(x) : X = R_n \to Y = R_n$ имеет в базисе $e_1, \ldots, e_n$ (так что $x = \sum_1^n x_k e_k$) аналити-

ское представление

$$y_1 = f_1(x_1, \dots, x_n),$$
$$\dots\dots\dots$$
$$y_n = f_n(x_1, \dots, x_n),$$

и пусть $J(a)=0$. Отсюда следует, что векторы

$$\operatorname{grad} f_1(a) = \left\{ \frac{\partial f_1(a)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f_1(a)}{\partial x_n} \right\}$$
$$\dots\dots\dots$$
$$\operatorname{grad} f_n(a) = \left\{ \frac{\partial f_n(a)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f_n(a)}{\partial x_n} \right\}$$

линейно зависимы и тем самым порождают некоторое истинное подпространство Z в пространстве X. Это подпространство мы я будем называть градиентным. Пусть далее $\operatorname{grad} J(a) \neq 0$. Как известно (07.I4) производная от определителя n-го порядка равна сумме n определителей, отличающихся от данного тем, что в i-ом слагаемом i-ый столбец состоит из производных i-го столбца данного определителя; поэтому, если все миноры $(n-1)$-го порядка матрицы $\|f'(a)\|$ равны 0, то для любого направления l и $\frac{\partial J(a)}{\partial l} = 0$, поскольку каждый из определителей указанной суммы можно разложить по столбцу, где стоят производные, с коэффициентами, равными некоторым минорам исходного определителя. Но в нашем случае по условию $\operatorname{grad} J(a) \neq 0$, и, значит, существует направление l, в котором $\frac{\partial J(a)}{\partial l} \neq 0$; следовательно, у матрицы $\|f'(x)\|$ существует минор $(n-1)$-го порядка $B(x)$, равный при $x=a$ некоторому числу $B \neq 0$. Пусть этот минор, для определенности, располагается в первых $(n-1)$ строках и первых $(n-1)$ столбцах матрицы $f'(a)$.

Рассмотрим в окрестности точки $a=(a_1, \dots, a_n)$ функции

$$\xi_1 = f_1(x_1, \dots, x_n)$$
$$\xi_{n-1} = f_{n-1}(x_1, \dots, x_n)$$
$$\xi_n = \qquad\qquad x_n.$$

Очевидно, имеет место равенство $\frac{\partial(\xi_1,\dots,\xi_n)}{\partial(x_1,\dots,x_n)} = B(x) \neq 0.$

Поэтому величины $\xi_1,\dots,\xi_n$ в некоторой окрестности точки a могут служить новыми координатами (2.17в). В этих координатах отображение f записывается формулами

$$\begin{aligned} y_1 &= \xi_1 \\ &\dots\dots \\ y_{n-1} &= \xi_{n-1} \\ y_n &= \varphi(\xi_1,\dots,\xi_n) \end{aligned}$$

где $\varphi(\xi_1,\dots,\xi_n) = f_n(x_1(\xi),\dots,x_{n-1}(\xi),\xi_n)$. При этом согласно I.33, имеем $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\xi}\cdot\frac{d\xi}{dx}$ и

$$\mathcal{J}(x) = \det\left\|\frac{dy}{dx}\right\| = \det\left\|\frac{dy}{d\xi}\right\|\cdot\det\left\|\frac{d\xi}{dx}\right\| = B(x)\cdot\frac{\partial\varphi(x)}{\partial\xi_n},$$

$$\frac{\partial\varphi(a)}{\partial\xi_n} = 0.$$

Далее, обозначая $\psi = \frac{\partial\varphi}{\partial\xi_n}$ и используя также I.34г, находим

$$\begin{aligned} \operatorname{grad}\mathcal{J}(a) &= \operatorname{grad}B(a)\cdot\psi(a) + B(a)\operatorname{grad}\psi(a) = B(a)\operatorname{grad}\psi(a) = \\ &= B(a)\left(\frac{\partial\psi}{\partial\xi_1}\operatorname{grad}\xi_1(a) + \dots + \frac{\partial\psi}{\partial\xi_n}\operatorname{grad}\xi_n(a)\right) = \\ &= B(a)\left(\frac{\partial\psi}{\partial\xi_1}\cdot\operatorname{grad}y_1(a) + \dots + \frac{\partial\psi}{\partial\xi_{n-1}}\operatorname{grad}y_{n-1}(a) + \frac{\partial\psi}{\partial\xi_n}e_n\right). \end{aligned}$$

Если бы было $\frac{\partial\psi(a)}{\partial\xi_n} = 0$, то $\operatorname{grad}\mathcal{J}(a)$ линейно выражался бы через $\operatorname{grad}y_1,\dots,\operatorname{grad}y_{n-1}$, что по условию не имеет места. Поэтому $\frac{\partial\psi(a)}{\partial\xi_n} \neq 0$. Отсюда, по теореме о неявной функции, мы получаем, что уравнение $\mathcal{J}(x) = 0$ или, что то же, $\psi(\xi_1,\dots,\xi_n)$, можно разрешить относительно ξ_n, так что в координатах $\xi_1,\dots,\xi_n$ поверхность $S = \{x : \mathcal{J}(x) = 0\}$ может быть представлена в форме $\xi_n = \omega(\xi_1,\dots,\xi_{n-1})$, где ω – функция с непрерывными производными по своим аргументам в окрестности точки $\bar{a} = (a_1,\dots,a_{n-1})$. Вне поверхности S мы имеем $\mathcal{J}(x) \neq 0$; пусть для определенности $\mathcal{J}(x) > 0$ "над" поверхностью S, т.е. при

$\xi_n > \omega(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1})$, тогда, поскольку $\operatorname{grad} J(a) \neq 0$, "под" поверхностью S, т.е. при $\xi_n < \omega(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1})$, будет выполняться неравенство $J(x) < 0$.

Пусть $c = (c_1, \ldots, c_n)$ точка на поверхности S в пределах указанных выше окрестностей точки a. Отрезок $\ell = \{\xi_1 = c_1, \ldots, \xi_{n-1} = c_{n-1}, \xi_n = c_n + t\}$, где $|t| \leq \varepsilon$, протыкает (при $t = 0$) поверхность S. В пространстве Y образ $f(S)$ поверхности S имеет уравнение

$$y_n = \varphi(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}, \omega(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1})) = \varphi(y_1, \ldots, y_{n-1}, \omega(y_1, \ldots, y_{n-1}))$$

также класса C^1. Далее, образ отрезка ℓ лежит на прямой

$$L = \{y_1 = c_1, \ldots, y_{n-1} = c_{n-1}, y_n = \varphi(c_1, \ldots, c_{n-1}, c_n + t)\}.$$

При этом $\frac{\partial y_n}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_n} = \frac{1}{B} J(x)$, так что $\frac{\partial y_n}{\partial t} > 0$ при $t > 0$ и $\frac{\partial y_n}{\partial t} < 0$ при $t < 0$. Мы видим, что при t, изменяющемся от ε до $-\varepsilon$, когда точка $\xi(t) = \{c_1, \ldots, c_{n-1}, c_n + t\}$ пробегает отрезок ℓ "сверху вниз", соответствующая точка $f[\xi(t)]$ при $t \searrow 0$ опускается по прямой L до поверхности $f(S)$ и при дальнейшем убывании t поднимается по той же прямой L вверх. Это и означает, что отображение $y = f(x)$ в некоторой окрестности точки a имеет вид складки.

д. Особенность следующего типа, "Сборку" мы покажем на примере отображения $y = f(x) : R_2 \to R_2$

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= x_1 \\ y_2 &= -x_1 x_2 + x_2^3 \end{aligned}\right\} \qquad (I)$$

Здесь мы имеем

$$J(x) = \det \| f'(x) \| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -x_2, & -x_1 + 3x_2^2 \end{vmatrix} = -x_1 + 3x_2^2$$

так что особые точки располагаются на параболе $\Gamma : \{x_1 = 3x_2^2\}$ (рис. I.6-9). При этом $\operatorname{grad} y_1 = e_1$, $\operatorname{grad} y_2 = -x_2 e_1 + (-x_1 + 3x_2^2) e_2$ и в особых точках градиентное подпространство порождается вектором e_1. Далее

$$\operatorname{grad} J(x) = -e_1 + 6 x_2 e_2$$

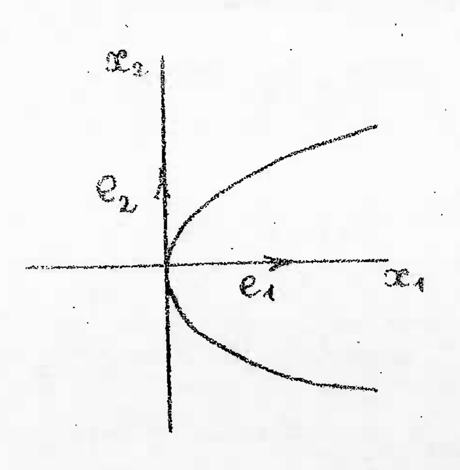


Рис. I.6-9

и при $x_2 \neq 0$ $grad\, \mathcal{I}(x)$ не лежит в градиентном пространстве; по предыдущему, особенности при $x_2 \neq 0$, т.е. на параболе Γ вне ее вершины, есть особенности типа складки. В точке (0, 0) $grad\, \mathcal{I}(x) = e_1$ лежит в градиентном пространстве. Характер отображения здесь легко установить непосредственно из рассмотрения формул (I). Как и в г, каждая вертикальная прямая $x_1 = const$ на плоскости (x_1, x_2) отображается в вертикальную прямую $y_1 = x_1 = const$ на плоскости (y_1, y_2). Но при $x_1 < 0$ и изменении x_2 от $-\infty$ до $+\infty$ величина y_2 меняется монотонно от $-\infty$ до $+\infty$, так что прямая $x_1 = C$ отображается на прямую $y_1 = const$ взаимно однозначно; а при $x_1 > 0$ y_2 как функция от x_2, сначала возрастает от $-\infty$ до положительного значения $\sqrt{\frac{x_1}{3}}$, затем убывает до $-\sqrt{\frac{x_1}{3}}$ и, наконец, возрастает до $+\infty$.

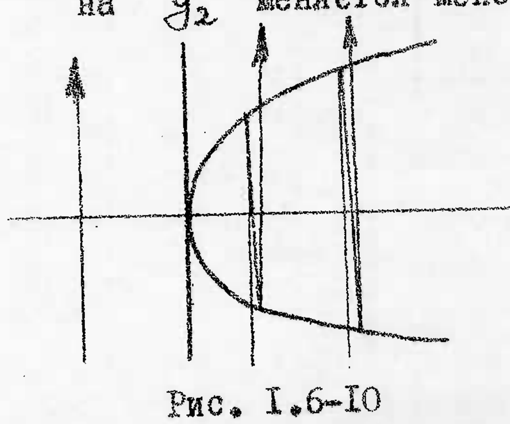


Рис. I.6-I0

Таким образом получается отображение с трижды проходимым отрезком (рис. I.6-I0).

Та особенность, которая при этом образуется в (0,0) и называется "Сборкой".

е. Обобщением складки и сборки является "особенность Уитни", задаваемая уравнениями в пространстве R_k

$$y_1 = x_1$$

$$\dots\dots$$

$$y_{k-1} = x_{k-1}$$

$$y_k = -x_1x_2 - x_1x_3^2 - \dots - x_1x_k^{k-1} + x_k^{k+1}$$

ж. Существуют и более сложные особенности отображений. Для распознавания особенностей Уитни имеются общие теоремы, аналогичные теореме из в. Вообще в настоящее время особенности дифференцируемых отображений привлекают большой интерес. См., например,

статью В.И.Арнольда "Особенности гладких отображений" в УМН, т. XXIII, вып. I (139), а также сборник переводов "Особенности дифференцируемых отображений", издательство "Мир", Москва 1968.

§ 2.3. Стационарные значения числовых функций.

2.31. Экстремумы.

а. Пусть числовая функция $y = f(x)$ определена в области G нормированного пространства X. Внутренняя точка $a \in G$ называется точкой локального минимума функции $f(x)$, если всюду в некоторой окрестности точки a выполняется неравенство $f(x) \geq f(a)$. Аналогично, внутренняя точка $b \in G$ называется точкой локального максимума функции $f(x)$, если всюду в некоторой окрестности точки b выполняется неравенство $f(x) \leq f(b)$. Точки локального максимума и точки локального минимума называются точками локального экстремума.

В точке локального экстремума одновременно реализуется и локальный экстремум вдоль каждой прямой, проходящей через эту точку. Поэтому, если функция $f(x)$ дифференцируема, то в точке локального экстремума обращается в нуль производная функции $f(x)$ по любому одномерному подпространству (I.46г). Вспоминая выражение производной по одномерному подпространству, мы заключаем, что в точке a локального экстремума функции $f(x)$ для любого вектора $h \in X$ имеет место равенство $f'(a)h = 0$; другими словами, в точке локального экстремума оператор $f'(a)$ становится нулевым оператором:

$$f'(a) = 0 \qquad (1)$$

Точки a, в которых выполняется равенство (1), называются стационарными точками функции $f(x)$. В каждой из них главная линейная часть приращения функции обращается в нуль. (И следовательно, приращение функции имеет высший порядок малости по сравнению с h).

Вообще говоря, это еще не означает, что в точке a обязательно реализуется локальный экстремум функции $f(x)$, но, во всяком случае, искомые экстремальные точки содержатся в числе стационарных. Найдя стационарные точки, следует каждую из них дополнительно проанализировать на "характер стационарности".

б. Рассмотрим случай $X = R_n$, $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$. Тогда уравнение (I) равносильно системе n уравнений с неизвестными $a_1, \ldots, a_n$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f(a_1, \ldots, a_n)}{\partial x_1} &= 0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial f(a_1, \ldots, a_n)}{\partial x_n} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

и разыскание стационарных точек приводится к разысканию решений этой системы.

Это - известный результат классического анализа.

в. Пусть M есть отрезок $a \le x \le b$ вещественной оси и $V = V(c, r)$ шар в нормированном пространстве Y с центром в точке c и радиуса r. Пусть $\mathcal{F}(x, y)$ вещественная функция, определенная и равномерно непрерывная на $M \times V$ и обладающая равномерно непрерывной производной $\frac{\partial \mathcal{F}(x, y)}{\partial y}$.

Пусть далее $Y(M)$ нормированное пространство всех непрерывных функций $y(x): M \to Y$ с нормой $\|y\| = \sup_{a \le x \le b} |y(x)|$ и $V(M) \subset Y(M)$ совокупность тех функций $y(x) \in Y(M)$, значения которых лежат в шаре V. Как мы знаем из I.16д и I.48 в этом случае определен оператор $\Phi[y]: V(M) \to R(M)$ действующий по формуле

$$\Phi[y](x) = \mathcal{F}(x, y(x))$$

представляющий собою непрерывное и дифференцируемое отображение из $V(M)$ и $R(M)$ с производной

$$\Phi'(y) = \frac{\partial \mathcal{F}(x, y(x))}{\partial y};$$

этот линейный оператор действует на элемент $h \in Y(M)$ по правилу

$$\Phi'(y) h = \frac{\partial \mathcal{F}(x, y(x))}{\partial y} h(x)$$

Рассмотрим числовую функцию на $V(M)$

$$\mathcal{J}[y] \equiv \int_a^b \Phi[y](x)\,dx \equiv \int_a^b \mathcal{F}(x, y(x))\,dx$$

и найдем ее стационарные точки. Для этого составим ее производную

$$\mathcal{J}'[y] = \int_a^b \Phi'[y](x)\,dx .$$

Это есть оператор, действующий из $Y(M)$ в R_1 по формуле

$$\mathcal{J}'[y]\cdot h = \int_a^b \frac{\partial \mathcal{F}(x, y(x))}{\partial y} h(x)\,dx \qquad (3)$$

В стационарной точке $y = a \equiv a(x)$ выражение $\mathcal{J}'[a]h = 0$ при любом h, иначе говоря, интеграл (3) с $y(x) \equiv a(x)$ обращается в нуль для любой функции $h(x) \in Y(M)$

Мы покажем, что в таком случае и функция $\frac{\partial \mathcal{F}(x, a(x))}{\partial y}$ обращается тождественно в нуль. Для этого используем лемму:

Лемма. Пусть при каждом $x \in M = [a, b]$ задан линейный непрерывный функционал $\mathcal{P}(x)$ на пространстве Y, непрерывно зависящий от x, и пусть для любой непрерывной функции $h(x) \in Y(M)$ выполняется равенство

$$\int_a^b \mathcal{P}(x)\,h(x)\,dx \equiv 0 \qquad (4)$$

Тогда $\mathcal{P}(x) \equiv 0$.

Доказательство. Пусть для некоторой точки $c \in [a, b]$ имеем $\mathcal{P}(c) \neq 0$; пусть, например, $\|\mathcal{P}(c)\| = \mu > 0$. В силу непрерывности $\mathcal{P}(x)$ можно найти такое $\delta > 0$, что при $|x - c| \le \delta$ выполняется неравенство $|\mathcal{P}(c) - \mathcal{P}(x)| < \frac{\mu}{3}$. Рассмотрим в пространстве Y такой вектор h, $\|h\| = 1$, что $\mathcal{P}(c)h > \frac{2\mu}{3}$; тогда для $|x - c| \le \delta$ будем иметь $\mathcal{P}(x)h \ge \mathcal{P}(c)h - |[\mathcal{P}(x) - \mathcal{P}(c)]h| \ge \frac{2\mu}{3} - \frac{\mu}{3} = \frac{\mu}{3}$. Пусть теперь $\tau(x) \ge 0$ вещественная непрерывная функция, отличная от 0 только при $|x - c| \le \delta$ и такая, что

$$\int_a^b \tau(x)\,dx = 1$$

Положим $h(x) = h\cdot\tau(x)$. Мы имеем

$$\int_a^b P(x)h(x)dx = \int_{c-\delta}^{c+\delta} P(x)h\tau(x)dx \geq \frac{\mu}{3}\int_{c-\delta}^{c+\delta}\tau(x)dx = \frac{\mu}{3}$$

что противоречит условию (4). Лемма доказана.

Используя лемму, мы получаем для искомой функции $a(x)$ уравнение

$$\frac{\partial F(x, a(x))}{\partial y} = 0$$

Решая его при каждом x и выделяя непрерывные ветви решений - если таковые существуют - получаем множество всех стационарных точке функции $\mathcal{J}[y]$. Для выделения из них точек экстремума требуется дальнейшее конкретное исследование каждой стационарной точки.

2.32. Условный экстремум.

а. Определения. Для числовых функций от многомерного аргумента $x \in G \subset X$ возникает новый тип экстремальных задач - задачи на условный экстремум. Постановка задачи на условный экстремум такова. Нам задана, как и ранее, числовая дифференцируемая функция $y = f(x)$ $(G \subset X \to R)$. Кроме того, нам задано новое нормированное пространство Z и дифференцируемая векторная функция $\varphi(x): G \to Z$; из принимаемых ею значений в области G мы фиксируем некоторое значение $C \in Z$. Условие

$$\varphi(x) = C \qquad (I)$$

выделяет в области G поверхность уровня функции $\varphi(x)$.

Точка $a \in G$ называется <u>точкой условного локального минимума функции $f(x)$ при условии (I)</u>, если $\varphi(a) = C$ и для всех точек x из некоторой окрестности a, удовлетворяющих условию (I), справедливо неравенство $f(x) \geq f(a)$. Иными словами, точка a, лежащая на поверхности уровня (I), есть точка условного минимума функции $f(x)$, если для всех точек этой поверхности уровня, достаточно близких к точке a, выполняется неравенство $f(x) \geq f(a)$. При этом вовсе не требуется, чтобы неравенство $f(x) \geq f(a)$ выполнялось для точек x, хотя и близких к a, но не лежащих на поверхности уровня (I).

Аналогично с заменой знака $\geq$ на $\leq$, определяется

точка условного максимума.

Точки условного максимума и условного минимума вместе называются точками условного экстремума.

Ниже будет найдено необходимое условие, которому удовлетворяют точки условного экстремума. Предположим, что рассматриваемая точка a является обыкновенной точкой поверхности $\varphi(x)=C$ (2.22), т.е. существует такое подпространство $X_1 \subset X$, что оператор $\frac{\partial\varphi(a)}{\partial x_1}$ $(X_1 \to Z)$ обратим. Тогда, как мы знаем (2.24в), на некотором подпространстве $X_2 \subset X$, составляющем в прямой сумме с X_1 все пространство X, оператор $\frac{\partial\varphi(a)}{\partial x_2}$ совпадает с нулевым оператором.

б. Лемма. В обыкновенной точке a условного экстремума функции $f(x)$ для всякого $h_2 \in X$ имеем $f'(a)h_2 = 0$.

Доказательство. Пусть для некоторого $h_2 \in X_2$ это не выполняется, т.е. $f'(a)h_2 \neq 0$. Мы утверждаем, что для любого достаточно малого $\alpha \in R_1$ можно так выбрать $h_1 \in X_1$, что точка $a+\alpha h_2 + h_1$ по-прежнему будет лежать на "поверхности" (I), т.е.

$$\varphi(a+\alpha h_2+h_1)=C \qquad (2)$$

при этом h_1 есть бесконечно малая величина по сравнению с α. Рассмотрим функцию от α и h_1:

$$\Phi(\alpha,h_1) \equiv \varphi(a+\alpha h_2+h_1)-C \qquad (R_1 \times X_1 \to Z)$$

При $\alpha=0$, $h_1=0$ она обращается в нуль. Далее,

$$\frac{\partial\Phi(0,0)}{\partial h_1} = \varphi'(a)\frac{\partial x}{\partial h_1}\bigg|_{x=a} = \frac{\partial\varphi(a)}{\partial x_1}$$

по условию есть обратимый оператор. Применяя теорему о неявной функции 2.12 мы получаем возможность выразить h_1 из уравнения (2); пусть, например, это решение дается функцией

$$h_1 = \psi(\alpha) \qquad (R_1 \to X_1)$$

Функция $\psi(\alpha)$ дифференцируема (2.14) и

$$\psi'(0) = -\left[\frac{\partial\varphi(a)}{\partial x_1}\right]^{-1}\frac{\partial\Phi(0,0)}{\partial\alpha} =$$

$$= -\left[\frac{\partial\varphi(a)}{\partial x_1}\right]^{-1}\varphi'(a); h_2 = 0$$

поскольку $h_2 \in X_2$ и $\varphi'(a)h_2 = 0$. Поэтому $h_1 = \psi(\alpha)$ — бесконечно малое по сравнению с α.

Рассмотрим теперь $f(a+\alpha h_2+\alpha\ )$, где h_1 есть уже найденная величина $\psi(\alpha)$. Мы имеем

$$f(a+\alpha h_2+h_1) - f(a) = f'(a)(\alpha h_2+h_1) + o(\alpha h_2+h_1) =$$
$$= \alpha f'(a)h_2 + f'(a)h_1 + o(\alpha h_2+h_1).$$

Справа первое слагаемое есть числовая линейная функция от α с угловым коэффициентом $f'(a)h_2 \neq 0$. Второе и третье слагаемое бесконечно малы по сравнению с α вместе с h_1. Но в таком случае при $\alpha = 0$, $h_1 = h_1(\alpha) = 0$ функция $f(x)$ не имеет условного экстремума: точка $x = a+\alpha h_2+h_1$ лежит по доказанному на "поверхности" (I) как угодно близко к точке a, а разность $f(x)-f(a)$ при разных знаках α имеет разные знаки.

Таким образом, из $h_2 \in X_2$ следует $f'(a)h_2 = 0$, и лемма доказана.

Вообще будем называть обыкновенную точку a на поверхности (I) <u>условно стационарной точкой функции</u> $f(x)$ <u>при условии</u> $\varphi(x) = C$, если $f'(a)h_2 = 0$ для всякого $h_2 \in X_2$, где X_2 нулевое подпространство оператора $\varphi'(a)$. Всякая условно экстремальная точка дифференцируемой функции $f(x)$ является условно стационарной; но условно стационарная точка может не быть условно экстремальной (как и в теории абсолютного экстремума).

в. Теперь мы можем сформулировать необходимое условие для условно стационарной точки (следовательно, и для точки локального условного экстремума):

Т е о р е м а. <u>Если точка</u> a <u>есть условно стационарная</u>

точка функции $f(x): G \subset X \to R_1$ при условии (I), то существует такой линейный непрерывный функционал $\lambda(z)$ на пространстве Z, что для любого $h \in X$

$$f'(a)h = \lambda\,[\varphi'(a)h]. \qquad (3)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Определим функционал $\lambda(z)$, используя формулу (3) и обратимость оператора $\frac{\partial \varphi(a)}{\partial x_1}$:

$$\lambda(z) = f'(a)\left[\frac{\partial \varphi(a)}{\partial x_1}\right]^{-1} z \qquad (4)$$

Непрерывность функционала $\lambda(z)$ следует из непрерывности оператора $\left[\frac{\partial \varphi(a)}{\partial x_1}\right]^{-1}$ и непрерывности оператора $f'(a)$. Поскольку $h = h_1 + h_2$, где $h_1 \in X_1$, $h_2 \in X_2$, и по определению в условно стационарной точке имеем $\varphi'(a)h_2 = 0$, $f'(a)h_2 = 0$, равенство (3) достаточно установить для векторов $h_1 \in X_1$; а для $h = h_1$ оно очевидно следует из (4).

г. Из теоремы в следует и способ разыскания условно стационарных точек. Именно, мы рассмотрим пока неопределенный линейный функционал $\lambda(x)$ $(Z \to R_1)$ и составим функцию

$$\mathcal{F}(x) = f(x) - \lambda\,[\varphi(x)].$$

В искомой условно стационарной точке a функции удовлетворяется уравнение (3)

$$f'(a) - \lambda\,[\varphi'(a)] = 0$$

что представляет собою выражение того факта, что точка a есть стационарная точка (во всей области G) функционала $\mathcal{F}(x)$. Тем самым задача об условно стационарных точках сводится к задаче об отыскании обычных стационарных точек некоторой другой функции с неизвестным функционалом $\lambda(z)$.

Среди условно стационарных точек находятся и все условно экстремальные точки; выделение их из совокупности всех условно стационарных точек требует - как и в случае абсолютного экстремума - индивидуального рассмотрения каждой условно стационарной точки.

2.33. П р и м е р ы.

а. Пусть

$$X = R_n, \quad y = f(x) : G \subset R_n \to R_1,$$
$$z = \varphi(x) : G \to R_k.$$

Таким образом, условие $\varphi(x) = C$ можно записать в виде k числовых соотношений

$$\left.\begin{aligned} &\varphi_1(x_1, \ldots, x_n) = C_1 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\varphi_k(x_1, \ldots, x_n) = C_n \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Линейный функционал $\lambda(z) : R_k \to R_1$ определяется заданием k чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ и действует на вектор $z = \{z_1, \ldots, z_k\} \in R_k$ по формуле

$$\lambda(z) = \lambda_1 z_1 + \ldots + \lambda_k z_k$$

Решение задачи об условном экстремуме теперь сводится к отысканию стационарных точек для функции

$$\mathcal{F}(x) \equiv f(x) - \lambda[\varphi(x)] = f(x_1, \ldots, x_n) - \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \varphi_i(x_1, \ldots, x_n)$$

Числа λ_i называются <u>множителями Лагранжа</u>. Для решения этой задачи мы должны решить уравнение

$$\mathcal{F}'(x) \equiv f'(x) - \lambda \varphi'(x) = 0,$$

или, в координатной записи, систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial f(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_1} - \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \frac{\partial \varphi_i(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_1} = 0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\frac{\partial f(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_n} - \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \frac{\partial \varphi_i(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_n} = 0 \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Таким образом, задача приводится к решению системы $k + n$ уравнений (1) и (2) с неизвестными $x_1, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_k$. Это – известный результат классического анализа.

б. Как и в 2.31в, рассмотрим функцию

$$\mathcal{I}(y) = \int_a^b \mathcal{F}(x, y(x))\, dx : V(M) \to R_1$$

(при тех же условиях на $\mathcal{F}(x, y)$). Будем искать ее условно стационарные точки на поверхности, определяемой другим аналогич-

ным выражением

$$\mathcal{K}(y)=\int_a^b G(x,y(x))\,dx=C \qquad (3)$$

где на $G(x,y)$ наложены такие же условия, как и на $\mathcal{F}(x,y)$. Пространство Z в данном случае совпадает с R_1, и линейный функционал $\lambda(z)$ есть умножение на число λ. В соответствии с общей теорией искомые условно стационарные точки есть обычные стационарные точки для функции

$$Q(y)=\mathcal{J}(y)-\lambda\mathcal{K}(y)=\int_a^b\left[\mathcal{F}(x,y(x))-\lambda G(x,y(x))\right]dx$$

Для их разыскания согласно 2.31в, следует рассмотреть уравнение

$$\frac{\partial\mathcal{F}(x,y(x))}{\partial y}-\lambda\frac{\partial G(x,y(x))}{\partial y}=0 \qquad (4)$$

и отобрать из возможных решений те, которые удовлетворяют условию (3).

Пусть, например, $[a,b]=[0,1]$, $\mathcal{F}(x,y)=y^3$, $G(x,y)=y^2$, $C=1$, таким, образом, мы должны найти условно стационарные точки функции

$$\mathcal{F}[y]=\int_0^1 y^3(x)\,dx \qquad (5)$$

при условии

$$\mathcal{K}[y]=\int_0^1 y^2(x)\,dx=1 \qquad (6)$$

Уравнение (4) в данном случае принимает вид

$$3y^2(x)-2\lambda y(x)=0$$

Его решения: $y_1(x)\equiv 0$ непригодно, так как не удовлетворяет условию (6); $y_2(x)=\frac{2\lambda}{3}$ годится, если $\frac{2\lambda}{3}=1$. Итак, имеется единственная условно стационарная точка $y_0(x)=1$. Является ли эта точка точкой условного экстремума? Положим $y(x)=1+\varepsilon(x)$, где $\|\varepsilon(x)\|$ мала тогда мы получим

$$\mathcal{F}(y)=\int_0^1 y^3(x)\,dx=1+3\int_0^1\varepsilon(x)\,dx+3\int_0^1\varepsilon_0^2(x)\,dx+\int_0^1\varepsilon^3(x)\,dx$$

$$\mathcal{K}(y)=\int_0^1 y^2(x)\,dx = 1+2\int_0^1 \varepsilon(x)\,dx + \int_0^1 \varepsilon^2(x)\,dx = 1$$

Отсюда

$$\int_0^1 \varepsilon(x)\,dx = -\frac{1}{2}\int_0^1 \varepsilon^2(x)\,dx$$

и

$$\mathcal{F}(y) = 1+\frac{3}{2}\int_0^1 \varepsilon^2(x)\,dx + \int_0^3 \varepsilon^3(x)\,dx$$

Второе слагаемое здесь положительно, третье имеет высший порядок малости. Отсюда следует, что точка $y_0(x)\equiv 1$ является точкой условного минимума для функции (5) при условии (6).

§ 2.4. Дифференциальные уравнения. (локальные теоремы).

2.41. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$y'(x) = f(x,y) \tag{1}$$

Здесь x - вещественный аргумент, меняющийся в промежутке $M=\{x\in R_1 : |x-a|\leq h\}$; $y=y(x)$ - искомая функция с значениями в банаховом пространстве Y ; $f(x,y): M\times V\subset \subset Y \to Y$ непрерывная ограниченная функция, определенная в произведении интервала M и шара $V=V(b_0,r)$ радиуса r с центром в точке $b_0\in Y$.

К уравнению (1) присоединяется начальное условие

$$y(a) = b_0 \in Y \tag{2}$$

Искомое решение $y(x)$, если оно существует, удовлетворяет соотношению

$$y(x) = b_0 + \int_a^x f(\xi, y(\xi))\,d\xi \tag{3}$$

которое получается при интегрировании обеих частей равенства (1) с учетом (2). Обратно, если $y(x)$ есть решение уравнения (3), то дифференцируя (3), получаем (1), а подставляя в (3) $x=a$, получаем (2).

Таким образом, разыскание решения уравнения (3) равносильно разысканию решения уравнения (1) с условием (2).

Решить уравнение (3) - это значит найти неподвижную точку отображения

$$\mathcal{F}[y] \equiv b_0 + \int_a^x f(\xi, y(\xi))\,d\xi : V(M) \to V(M)$$

где через $V(M)$, как и ранее, мы обозначаем полное метрическое пространство всех непрерывных функций $y(x)$, определенных для $x \in M$ и принимающих значения в шаре $V \subset Y$, с расстоянием, порожденным нормой $\|y(x)\| = \sup_{|x-a| \le h} |y(x)|$.

Наша задача состоит в установлении условий существования и единственности решения уравнения (3) хотя бы в пространстве $V(M_\delta)$, где $M_\delta = \{x \in M : |x-a| \le \delta\}$.

Вообще говоря, только при условии непрерывности $f(x,y)$ решения не существует ни при каком δ (см. задачу).

Поэтому для получения успешного результата мы должны накладывать на $f(x,y)$ дальнейшие условия.

Предположим, что функция $f(x,y)$ удовлетворяет в $M_h \times V$ условию Липшица:

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \le C |y_1 - y_2| \qquad (1)$$

с некоторой постоянной C.

Обозначим далее

$$B = \sup_{\substack{x \in M_h \\ y \in V}} |f(t,y)|_Y \qquad (2)$$

<u>Теорема</u>. При указанных предположениях для любого $\delta < \min(h, r/B, 1/C)$ отображение (3) переводит пространство $V(M_\delta)$ в себя и является сжимающим.

<u>Доказательство</u>. Мы имеем (при неопределенном пока $\delta \le h$)

$$\|\mathcal{F}(y_1(x)) - \mathcal{F}(y_2(x))\|_{Y(M_\delta)} = \sup_{|x-a| \le \delta} \left| \int_a^x [f(\xi, y_1(\xi)) - f(\xi, y_2(\xi))]\,d\xi \right| \le$$

$$\le \sup_{|x-a| \le \delta} \int_a^x |f(\xi, y_1(\xi)) - f(\xi, y_2(\xi))|\,d\xi \le$$

$$\leq \sup_{|x-a|} C \int_a^x |y_1(\xi) - y_2(\xi)|\, d\xi \leq$$

$$\leq C \int_a^x \sup_{|\xi - a| \leq \delta} |y_1(\xi) - y_2(\xi)|\, d\xi \leq$$

$$\leq C \cdot \delta \cdot \| y_1 - y_2 \|_{Y(M_\delta)}$$

так что отображение $\mathcal{F}[y] : V(M_\delta) \to V(M_\delta)$ является сжимающим при любом $\delta < 1/C$. Далее при каждом $x \in M_\delta$

$$\left| \mathcal{F}(y(x)) - b_0 \right|_Y \leq \int_a^x |f(\xi, y(\xi))|\, d\xi \leq B \cdot \delta$$

где $B = \sup_{\substack{x \in M_h \\ y \in V}} |f(x,y)|_Y$; таким образом, если взять $\delta \leq r/B$ мы будем иметь

$$\| \mathcal{F}(y(x)) - b_0 \|_{Y(M_\delta)} \leq r$$

так что $\mathcal{F}(y(x))$ вместе с $y(x)$ лежит в $V(M_\delta)$. Если же $\delta < \min(r/B, 1/C)$, то отображение $\mathcal{F}(y(x))$ переводит $V(M_\delta)$ в себя и является сжимающим, что и требовалось.

Отсюда следует существование и единственность неподвижной точки (I.43в), следовательно, существование и единственность в пространстве $V(M_\delta)$ решения уравнения (I) с условием (2).

2.42. Рассмотрим теперь дифференциальное уравнение с параметром λ :

$$y' = f(x, y, \lambda) \qquad \text{(I)}$$

Здесь попрежнему x – вещественный аргумент, меняющийся в промежутке $M = \{ x \in R_1 : |x - a| \leq h \}$ и $y = y(x)$ функция с значениями в банаховом пространстве Y ; параметр λ меняется в метрическом пространстве Λ ; функция $f(x,y,\lambda) : M \times V \times \Lambda \to Y$ ограничена, равномерно непрерывна и имеет ограниченную и равномерно непрерывную частную производную по y .

К уравнению (I) присоединяется начальное условие, также содержащее параметр λ :

$$y(a) = b(\lambda) : \Lambda \to Y \quad , \quad b(\lambda_0) = b_0 , \qquad (2)$$

причем функция $b(\lambda)$ равномерно непрерывна и ограничена на Λ. Обозначим через Λ_τ шар $\{\lambda \in \Lambda : \rho(\lambda, \lambda_0) \leq \tau\}$ Положим

$$B = \sup_{\substack{t \in M_h \\ y \in V \\ \lambda \in \Lambda}} |f(t,y,\lambda)| \quad , \quad C = \sup_{\substack{t \in M_h \\ y \in V \\ \lambda \in \Lambda}} \left\| \frac{\partial f(t,y,\lambda)}{\partial y} \right\|$$

Теорема. При высказанных условиях существует такое $\tau > 0$, что при любом $\delta < \min(h, \tau/B, 1/C)$ в области $M_\delta \times \Lambda_\tau$ определена непрерывная функция $y(x,\lambda)$, являющаяся решением уравнения (I) и удовлетворяющая условию (2).

Доказательство. Как и в 2.4I, нам нужно решить уравнение типа 2.4I (3), или, с учётом наличия параметра λ,

$$y(x,\lambda) = b(\lambda) + \int_a^x f(\xi, y(\xi,\lambda), \lambda)\, d\xi \qquad (3)$$

Подойдем к этой задаче, как к задаче на неявную функцию. Рассмотрим отображение

$$\mathcal{F}[y(x), \lambda] = y(x) - \left(b(\lambda) + \int_a^x f(\xi, y(\xi), \lambda)\, d\xi \right) \qquad (4)$$

переводящее любой шар $V(M_\delta) \times \Lambda$ в пространство $Y(M_\delta)$. Если $\lambda = \lambda_0$, то $b(\lambda) = b_0$ и для соответствующего решения $y_0(x)$ уравнения (I) с условием (2) – существующего по 2.4I в пространстве $V(M_\delta)$ – с некоторым $\delta \geqslant 0$ выполняется уравнение

$$\mathcal{F}[y_0(x), \lambda_0] = 0 \qquad (\text{в } Y(M_\delta)). \qquad (5)$$

Если имеется возможность использовать теорему о неявной функции 2.I2–2.I3, то мы получим существование в некотором шаре $\Lambda_\tau \subset \Lambda$ непрерывной функции $y(x,\lambda)$ с значениями в $V(M_\delta)$, удовлетворяющей условию

$$\mathcal{F}[y(x,\lambda), \lambda] = 0 \qquad (\text{в } Y(M_\delta)) \qquad (6)$$

а это и есть уравнение (3). Нам остается проверить выполнение условий теоремы о неявной функции. Эти условия следующие:

а. Функция $\mathcal{F}[y(t),\lambda]$ в $V(M_\delta)\times\Lambda$ является ограниченной и равномерно непрерывной функцией.

Для проверки этого условия рассмотрим отображение $\Phi(y(t,\lambda)) \equiv f(t, y(t,\lambda), \lambda)$ пространства $V(M_\delta\times\Lambda)$ в $Y(M_\delta\times\Lambda)$. По I.16д (где аргумент x надо заменить на пару (t,λ)) отображение $F(y(t,\lambda))$ является ограниченной и равномерно непрерывной функцией от $y(t,\lambda)$. Тем более, если мы ограничимся только функциями $y(t)$, не зависящими от λ, оно будет ограниченной и равномерно непрерывной функцией от $y(t)\in V(M_\delta)$ и $\lambda\in\Lambda$ с значениями в $Y(M_\delta)$. Оператор интегрирования, фигурирующий далее в (4), фиксирован и результат также будет ограниченной и равномерно непрерывной функцией от $y(t)$ и λ, что и требуется.

б. Функция $\mathcal{F}[y(x),\lambda]$ имеет в $V(M_\delta)\times\Lambda$ ограниченную и равномерно непрерывную производную по $y(x)$.

По условию $f(x,y,\lambda): M_\delta\times V\times\Lambda \longrightarrow Y$ имеет ограниченную и равномерно непрерывную производную по y. Поэтому отображение $\Phi(y(t,\lambda)) = f(t, y(t,\lambda), \lambda)$, которое мы рассмотрели в а, в силу I.48 (где также аргумент x нужно заменить на пару (t,λ)) будет иметь ограниченную и равномерно непрерывную производную (в $V(M_\delta\times\Lambda)$). Тем более оно будет иметь ограниченную и равномерно непрерывную производную, если мы ограничимся только функциями $y(t)$, независящими от λ. Далее оператор интегрирования, фигурирующий в (4) фиксирован, и по I.31 результат будет также обладать ограниченной и равномерно непрерывной производной по $y(t)$. Этим доказано б.

в. Оператор $\dfrac{\partial\mathcal{F}[y_0(x),\lambda_0]}{\partial y}$ обратим.

Действительно, для $y=y_0(x)$ и $\lambda=\lambda_0$ мы имеем

$$\frac{\partial\mathcal{F}[y_0(x),\lambda]}{\partial y} = E - \int_a^b \frac{\partial f(\xi, y_0(\xi), \lambda_0)}{\partial y}\, d\xi \qquad (7)$$

Поскольку $C = \sup_{x\in M_\delta} \left| \frac{\partial f(x, y_0(x), \lambda_0)}{\partial y} \right|$ и число δ выбрано так, чтобы иметь $\delta C < 1$, вычитаемое в правой части (7) будет иметь норму в $V(M_\delta)$, меньшую I. Вся правая часть в (7), как оператор, отстоящий от единичного по норме меньше, чем на I, будет обратима, что нам и требуется.

Теперь мы вправе применить теорему о неявной функции; применяя ее, приходим к утверждению теоремы.

2.43. Этим же путем можно получить и дифференцируемость решения $y(t,\lambda)$ по параметру λ, если только потребовать дифференцируемости по λ функций $f(t,y,\lambda)$ и $b(\lambda)$.

Теорема. Если в условиях теоремы 2.42 параметр λ меняется в шаре $Q_\tau = \{\lambda\in\Lambda : |\lambda-\lambda_0|\le\sigma\}$ нормированного пространства Λ и функция $f(t,y,\lambda)$, кроме производной по y, имеет равномерно непрерывную и ограниченную производную по λ, то существуют такие $\delta>0$ и $\tau>0$, что в области $M_\delta\times Q_\tau$ определена C^1 - функция $y(t,\lambda)$, являющаяся решением уравнения (I) с условием (2).

Доказательство. Достаточно проверить выполнение соответствующего условия теоремы о неявной функции - именно наличия ограниченной и равномерно непрерывной производной по λ у отображения $\mathcal{F}(y(t),\lambda)$ (2.42 (4)). Используя условие теоремы, мы немедленно получаем дифференцируемость отображения $\mathcal{F}(y(t),\lambda)$ по λ, а явное выражение этой производной

$$\frac{\partial \mathcal{F}(y(t),\lambda)}{\partial\lambda} = -\left(b'(\lambda) + \int_a^t \frac{\partial f(\xi, y(\xi),\lambda)}{\partial\lambda}\, d\xi\right.$$

показывает, что все нужные условия на $\frac{\partial \mathcal{F}(y(t),\lambda)}{\partial\lambda}$ выполняются. Теорема доказана.

2.44. Производная по начальному условию. Рассмотрим снова дифференциальное уравнение

$$y' = f(x,y) : M_h\times V \to Y \qquad (I)$$

с начальным значением $y(a)$, пробегающим шар $V_\rho(b_0)$;

$$y(a) = b \in Y \ , \quad |b - b_0| \leq \rho \qquad (2)$$

Будем считать, что выполняются условия теоремы 2.42 – 2.43 так что решение $y(x)$ задачи (1) – (2) существует и единственно, для каждого $b \in V_\rho(b_0)$ (с сохранением точки a). Получающееся семейство решений мы обозначим $y(t,b)$; все они определены для некоторого промежутка $|t-a| \leq \delta$. Как именно зависит величина y от b? Для этого полезно вычислить производную $\frac{\partial y(x,b)}{\partial b}$, которая существует по 2.42. Дифференцируя по b равенство

$$y(x,b) = b + \int_a^x f(\xi, y(\xi,b))\,d\xi$$

находим

$$\frac{\partial y(x,b)}{\partial b} = E + \int_a^x \frac{\partial f(\xi, y(\xi,b))}{\partial y} \cdot \frac{\partial y(\xi,b)}{\partial b}\,d\xi$$

Функция под знаком интеграла непрерывна по нашим предположениям и по теореме 2.42, так что

$$\frac{\partial f(\xi, y(\xi,b))}{\partial y} \cdot \frac{\partial y(\xi,b)}{\partial b} = \frac{\partial f(a,b)}{\partial y} \cdot \frac{\partial y(a,b)}{\partial b} + o(x-a) =$$

$$= \frac{\partial f(a,b)}{\partial y} + o(x-a),$$

поскольку $y(a,b) = b$ и, следовательно, $\frac{\partial y(a,b)}{\partial b} = E$
Поэтому

$$\frac{\partial y(x,b)}{\partial b} = E + \frac{\partial f(a,b)}{\partial y}(x-a) + o(x-a).$$

Эта формула показывает при достаточно малом $x-a$ направление и скорость изменения величины $y(t,b)$ в зависимости от изменения b.

Из этой же формулы видно, что при малых $|x-a|$ оператор $\frac{\partial y(x,b)}{\partial b}$ отличается по норме от E меньше, чем на единицу и потому обратим. В силу теоремы об обратной функции 2.17 отображение $y(t,b)$ при каждом фиксированном t с

достаточно малым $|t-a|$ переводит некоторый шар $B_\rho = \{b : |b-b_0| \le \rho\} \subset Y$ диффеоморфно в некоторую область $y(t,B) \subset Y$, т.е. окрестность $U \subset Y$ точки b_0 - в окрестность V точки $y(t,b_0)$; в частности, мы видим, что у точки $y(t,b_0)$ имеется окрестность - именно, V, - через каждую точку которой проходит интегральная кривая, начинающаяся в окрестности U.

2.45. Локальная динамическая система.

График решения $y = y(t)$ уравнения $y'(t) = \Phi(t,y)$ есть кривая в пространстве $T \times Y$. Годограф этого решения есть кривая в пространстве Y. Если придать аргументу t смысл "времени", то решение $y = y(t)$ задает закон движения точки в пространстве Y со скоростью $\Phi(t,y)$. Поэтому совокупность решений $y = y(t)$ называют динамической системой, точнее, имея в виду локальную точку зрения, локальной динамической системой. Общая картина значительно упрощается, если $\Phi(t,y)$ не зависит от t, так что исходное уравнение может быть записано в виде

$$\frac{dy}{dt} = \Phi(y) \quad (G \subset Y \to Y) \qquad (I)$$

Функция $\Phi(y)$ предполагается в дальнейшем имеющей непрерывную производную. В данном случае локальная динамическая система представляется, как поток некоей среды, скорость которой в каждой точке задается вектором $\Phi(y)$ и не зависит от времени. Решения $y = y(t)$ называются траекториями системы; как вытекает из 2.41 - 2.42 две траектории или не пересекаются, или целиком совпадают*/. Если для некоторого y_0 имеем $\Phi(y_0) = 0$, то $y \equiv y_0$ (const) является очевидным решением уравнения (I); соответствующая траектория вырождается в одну точку. Пусть $x_0 = \Phi(y_0) \ne 0$ по непрерывности $\Phi(y) \ne 0$ в некоторой окрестности точки y_0; в этой окрестности неподвижных точек нет, все точки с течением времени фактически перемещаются

---

*/ Если $y_1(t_1) = y_2(t_2) = p \in Y$, то $y(t_1+t) \equiv y(t_2+t)$, т.к. обе эти функции от t удовлетворяют одному и тому же уравнению с общим начальным условием

$$\frac{dy}{dt} = \Phi(y), \quad y(0) = p.$$

по своим траекториям. Моделью такой динамической системы может служить движение точек твердого тела при поступательном его перемещении с постоянной скоростью. Оказывается, что общий случай приводится к этому с помощью некоторого локального диффеоморфизма в пространстве Y, переводящего динамическую систему в окрестности точки y_0 в семейство отрезков, проходимых с постоянной скоростью. Для доказательства предположим, что $y_0 = 0$ (чего всегда можно добиться переносом) и что существует непрерывный линейный функционал $f(y): Y \to R_1$ такой, что $f(z_0) \neq 0$ (в гильбертовом пространстве Y можно положить $f(y) = (y, z_0)$; в банаховом пространстве существование такого функционала обеспечивается теоремой Хана-Банаха (см., например, Г.Е.Шилов, Математический анализ. Специальный курс, 2 издание, М.,1961, Дополнение, § 2, стр. 426). Рассмотрим подпространство $H = \{h \in Y : f(h) = 0\}$; оно замкнуто и не содержит z_0. Пусть далее L – одномерное подпространство, порожденное вектором z_0; утверждается, что все пространство Y есть прямая сумма L и H. Действительно, для любого $y \in Y$ и $h = y - \frac{f(y) z_0}{f(z_0)}$ очевидно имеем $f(h) = 0$, так что $h \in H$ и $y = h + z$, где $z = \frac{f(y)}{f(z_0)} z_0 \in L$, причем это разложение единственно, так как L и H имеют единственную общую точку 0. В подпространстве H рассмотрим шар $H_\rho = \{h \in H, |h| \le \rho\}$ и в подпространстве L – отрезок $T_\delta = \{t z_0, |t| \le \delta\}$. Поставим в соответствие каждой паре $(t, h) \in T_\rho \times H_\rho$ точку $y(t,h)$ – соответствующее значение решения уравнения (I) при начальном условии $y(0,h) = h$. При достаточно малых δ и ρ величина $y(t,h)$ определена на основании 2.42. Проверим, что отображение $(t,h) \to y(t,h)$ есть искомый диффеоморфизм. Мы имеем

$$y(t,h) = \eta(t,h) + \lambda(t,h) z_0$$

где $\eta(t,h) \in H$, $\lambda(t,h) \in R_1$. Заметим, что функция $y(t,h)$ непрерывна по совокупности (t,h) (поскольку в 2.42 непрерывность по параметру λ была доказана в пространстве функций $y(t,\lambda)$ с sup-метрикой по t); отсюда следует,

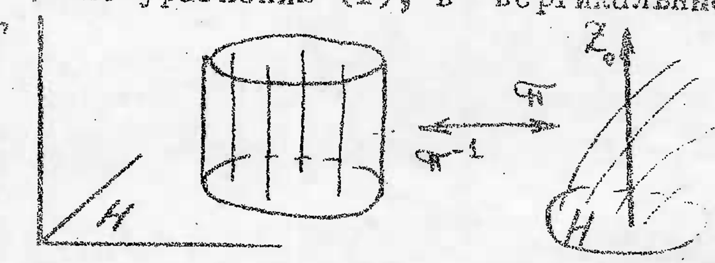
что и составляющие $\eta(t,h)$ и $\lambda(t,h)$ непрерывны по (t,h). Функция $y(t,h)$ имеет производную по t, равную $\Phi(y)$ в силу уравнения (I); отсюда следует, что и функции $\eta(t,h)$ и $\lambda(t,h)$ имеют производные по t равные соответствующим составляющим от $\Phi(y)$; эти составляющие разумеется непрерывны вместе с самой функцией Φ. При $t=0$, $h=0$ они, как составляющие вектора $\Phi(0)=z_0$, имеют значения 0 и I. Далее, функция $y(t,h)$ имеет производную по h (2.44), которая также непрерывна по (t,h). Из равенства $y(0,h)=h$ следует, что $\frac{\partial \eta(0,h)}{\partial h}=\frac{\partial y(0,h)}{\partial h}=E_H$ (тождественный оператор в H). В силу I.48 функция $y(t,h)$ дифференцируема по паре (t,h); ее производная естественно записывается с помощью матрицы

$$\begin{Vmatrix} \frac{\partial \lambda(t,h)}{\partial t} & \frac{\partial \lambda(t,h)}{\partial h} \\ \frac{\partial \eta(t,h)}{\partial t} & \frac{\partial \eta(t,h)}{\partial h} \end{Vmatrix}$$

При $t=0$, $h=0$ эта матрица принимает вид

$$\begin{Vmatrix} 1 & \frac{\partial \lambda(0,0)}{\partial h} \\ 0 & E_H \end{Vmatrix}$$

которая обратима по I.14и. Теперь из I.57б вытекает, что отображение $\pi:(t,h)\to y(t,h)$ является диффеоморфизмом некоторой окрестности нуля пространства $T\times H$ на окрестность нуля в пространстве Y. Обратный диффеоморфизм π^{-1} переводит траектории локальной динамической системы, построенной по уравнению (I), в "вертикальные" отрезки, для которых t является ведущей координатой так что с динамической точки зрения скорость движения по ним постоянна (равна I); это и есть наше утверждение.



2.46. Первые интегралы.

а. Рассмотрим совокупность решений уравнения

$$\frac{dy}{dt} = \Phi(y) \qquad (1)$$

в окрестности V точки $y_0 \in Y$ с $\Phi(y_0) \neq 0$.

Числовая C^1 функция $z(y)$, определенная в V, называется первым интегралом уравнения (I) (точнее, локальным первым интегралом), если она постоянна на каждой траектории этого уравнения. Используя диффеоморфизм π, построенный в 2.45, можно дать удобное описание всех первых интегралов уравнения (I). А именно, диффеоморфизм π^{-1} переводит всякий первый интеграл $z(y)$ в C^1 функцию $z(t,h): T_\delta \times H_\rho \to R_1$, постоянную на вертикальных отрезках множества $T_\delta \times H_\rho$. Такая функция задается однозначно своими значениями при $t=0$, $z(0,h) = \psi(h)$, причем $\psi(h): H_\rho \to R_1$ функция, обладающая непрерывной производной по $h \in H$. Обратно, если на H_ρ задана произвольная функция $\psi(h): H_\rho \to R_1$ с непрерывной производной, то функция $z(t,h) = \psi(h): T_\delta \times H_\rho \to R_1$, имеет непрерывную производную по аргументу (t,h) и диффеоморфизм π переводит ее в C^1-функцию $z(y)$, постоянную на траекториях, т.е. в первый интеграл уравнения (I). Замечая, что при диффеоморфизме π множество H_ρ переходит тождественно в себя, мы видим, что всякий первый интеграл уравнения (I) однозначно задается своими значениями на H_ρ, которые образуют на H_ρ функцию с непрерывной производной; его значения в остальных точках Y в окрестности V получаются из условия постоянства на каждой траектории.

6. Если $Y = R_n$ так что можно считать, что $H = R_{n-1}$ картина еще более проясняется. А именно, оказывается, что в некоторой окрестности точки $y_0 \in Y$ с $\Phi(y_0) \neq 0$ всегда существует $n-1$ функционально независимых (2.235) первых интеграла уравнения (I); с другой стороны, всякий первый интеграл этого уравнения в некоторой окрестности точки y_0 есть C^1 функция от любых фиксированных функционально независимых $(n-1)$ интегралов. Для доказательства первой части утверждения возьмем в H_ρ какие-либо координаты $h_1, \ldots, h_{n-1}$ в $T_\delta \times H_\rho$ функции $z_1(t,h) = h_1, \ldots, z_{n-1}(t,h) = h_{n-1}$ постоянны на вертикальных отрезках и, очевидно, функционально независимы; следовательно, их образы $z_1(y), \ldots, z_{n-1}(y)$ при диффеоморфизме π являются $n-1$ независимыми первыми интегралами

уравнения (I). С другой стороны, если имеются какие-то независимые первые интегралы $z_1(y), \ldots, z_{n-1}(y)$, то при диффеоморфизме π^{-1} они перейдут в функции $z_1(t,h), \ldots, z_{n-1}(t,h)$, постоянные на вертикальных отрезках и также функционально независимые, так что ранг матрицы

$$\left\| \begin{matrix} \frac{\partial z_1(0,0)}{\partial t} & \frac{\partial z_1(0,0)}{\partial h_1} & \ldots & \frac{\partial z_1(0,0)}{\partial h_{n-1}} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial z_{n-1}(0,0)}{\partial t} & \frac{\partial z_{n-1}(0,0)}{\partial h_1} & \ldots & \frac{\partial z_{n-1}(0,0)}{\partial h_{n-1}} \end{matrix} \right\|$$

равен $n-1$. Но так как первый столбец этой матрицы состоит из нулей, то

$$\left| \begin{matrix} \frac{\partial z_1(0,0)}{\partial h_1} & \ldots & \frac{\partial z_1(0,0)}{\partial h_{n-1}} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial z_{n-1}(0,0)}{\partial h_1} & \ldots & \frac{\partial z_{n-1}(0,0)}{\partial h_{n-1}} \end{matrix} \right| \neq 0$$

Таким образом, функции $z_1(0,h), \ldots, z_{n-1}(0,h)$ осуществляют диффеоморфизм некоторой окрестности $U(0) \subset H_\rho$ в некоторую область $V \subset R_{n-1}$. Поэтому всякая C^1 функция $\psi(h)$ в $U(0)$ может быть представлена в виде
$\psi(h) = \mathcal{F}(z_1(0,h), \ldots, z_{n-1}(0,h))$ (2.17б) с C^1-функцией $\mathcal{F}(z_1, \ldots, z_{n-1})$
Возьмем теперь любой первый интеграл $z(y)$ уравнения (I), при диффеоморфизме π^{-1} он перейдет в функцию $z(t,h)$, зависящую только от h, и по доказанному представится в виде $\mathcal{F}(z_1(0,h), \ldots, z_{n-1}(0,h)) = \mathcal{F}(z_1(t,h), \ldots, z_{n-1}(t,h)) = \mathcal{F}(z_1(y), \ldots, z_{n-1}(y))$, что и требовалось.

в. Даже неполный набор из $k \leq n-1$ независимых первых интегралов дает нам ценную информацию о траекториях системы. Именно, если известны $k \leq n-1$ независимых первых интеграла, положим $z_1(y), \ldots, z_k(y)$, то при любом наборе постоянных $C_1, \ldots, C_k$ (в некоторой окрестности значений $C_1^0 = z_1(y_0), \ldots, C_k^0 = z_k(y_0)$) уравнения

$$z_1(y) = C_1, \ldots, z_k(y) = C_k \qquad \text{(I)}$$

определят (по 2.25) $n-k$ -мерное многообразие $M(c_1,\dots,c_k)\subset Y$. При этом, если некоторая траектория уравнения (I) пересекается с каким-либо из многообразий $M(c_1,\dots,c_k)$, то она лежит в нем целиком, поскольку функции $z_1(y),\dots,z_k(y)$ сохраняют на этой траектории свои значения. Чем больше k, тем меньшую размерность имеют многообразия $M(c_1,\dots,c_k)$ и тем более точные сведения мы получаем о расположении траекторий. Наконец, если $k=n-1$, то уравнения (I) определяют одномерные многообразия, следовательно, сами траектории.

г. В некоторых случаях, не зная траекторий уравнения (I) заранее, можно фактически найти $n-1$ независимых первых интеграла в окрестности заданной точки y_0. Тогда уравнения (I) определят нам неявным образом сами траектории.

Пример. Пусть $Y=R_3$, $y=(y_1,y_2,y_3)$ и дано уравнение

$$\frac{dy}{dt}=\{y_2-y_3,\ y_3-y_1,\ y_1-y_2\} \qquad (2)$$

или, в скалярной форме, система уравнений

$$\frac{dy_1}{dt}=y_2-y_3,\quad \frac{dy_2}{dt}=y_3-y_1,\quad \frac{dy_3}{dt}=y_1-y_2 \qquad (3)$$

Нас интересуют траектории уравнения (2) - или, что то же, системы (3). Складывая уравнения (3), находим

$$\frac{d(y_1+y_2+y_3)}{dt}=0$$

Отсюда следует, что на каждой траектории системы (3) выполняется равенство $y_1+y_2+y_3=\mathrm{const}$, так что функция $z_1(y)=y_1+y_2+y_3$ является первым интегралом системы (3). Далее, умножая уравнения системы (3) соответственно на y_1, y_2, y_3 и складывая, получаем

$$\frac{y_1dy_1+y_2dy_2+y_3dy_3}{dt}=y_1(y_2-y_3)+y_2(y_3-y_1)+y_3(y_1-y_2)=0,$$

откуда находится другой первый интеграл $z_2(y)=y_1^2+y_2^2+y_3^2$.

Матрица

$$\left\|\begin{matrix}\frac{\partial z_1}{\partial y_1} & \frac{\partial z_1}{\partial y_2} & \frac{\partial z_1}{\partial y_3}\\ \frac{\partial z_2}{\partial y_1} & \frac{\partial z_2}{\partial y_2} & \frac{\partial z_2}{\partial y_3}\end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix}1 & 1 & 1\\ 2y_1 & 2y_2 & 2y_3\end{matrix}\right\|$$

петит

имеет ранг 2 всюду, кроме точек прямой $\gamma = \{y \in R^3 : y_1 = y_2 = y_3\}$. Заметим, что точки этой прямой, очевидно, являются неподвижными точками системы (3). В окрестности любой другой точки $y \notin \gamma$ траектории локально определяются уравнениями

$$y_1 + y_2 + y_3 = const \qquad y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = const$$

мы видим, что они являются окружностями, ортогональными прямой γ, с центрами, лежащими на этой прямой.

2.47. Линейные уравнения в частных производных. Пусть в каждой точке y области G банахова пространства Y задана C^1- функция $\Phi(y)$ с значениями в том же пространстве Y, - иначе говоря, векторное C^1- поле $\Phi(y)$. Будем искать C^1- функцию $z(y): G \to R_1$ из уравнения

$$z'(y)\Phi(y) = 0 \qquad (4)$$

(Напомним, что $z'(y)$ есть линейный оператор из Y в R_1, так что левая часть в (4) есть результат применения оператора $z'(y)$ к вектору $\Phi(y)$). В соответствии с I.47г уравнение (4) означает, что в каждой точке $y \in G$ производная функции $z(y)$ по направлению вектора $\Phi(y)$ равна 0. Рассмотрим в области G уравнение

$$\frac{dy}{dt} = \Phi(y) \qquad (5)$$

На каждой траектории уравнения (5) искомая функция $z(y)$ становится функцией от параметра t, и уравнение (4) означает, что производная этой функции равна 0. Таким образом, искомая функция $z(y)$ должна быть постоянной вдоль каждой траектории уравнения (5), иными словами, должна быть первым интегралом этого уравнения. Очевидно, что верно и обратное, каждый первый интеграл уравнения (5) является и решением уравнения (4). Таким образом, вопрос о решениях уравнения (4) приводится к вопросу о первых интегралах уравнения (5). В пространстве R_n с фиксированным базисом имеем

$$\Phi(y) = \{\Phi_1(y), \ldots, \Phi_n(y)\}, \quad z = z(y_1, \ldots, y_n)$$

$$z'(y)\Phi(y) = \frac{\partial z}{\partial y_1}\Phi_1(y) + \ldots + \frac{\partial z}{\partial y_n}\Phi_n(y)$$

и уравнение (4) становится линейным однородным уравнением в частных производных. Для уравнения

$$\frac{dy}{dt} = \Phi(y) \quad \text{или} \quad \frac{dy_j}{dt} = \Phi_j(y) \quad (j = 1, \dots, n) \quad (6)$$

как нам уже известно из 2.46б, в пространстве $Y = R_n$ в окрестности любой не неподвижной точки уравнения (6) имеются $n-1$ функционально независимых первых интеграла, положим $z_1(y), \dots, z_{n-1}(y)$, и любой первый интеграл может быть выражен через них по формуле

$$z(y) = \psi(z_1(y), \dots, z_{n-1}(y)),$$

где $\psi(z_1, \dots, z_n)$ некоторая (произвольно выбранная) функция с непрерывной производной.

петит

Так для уравнения в R_3

$$\frac{\partial z}{\partial y_1}(y_2 - y_3) + \frac{\partial z}{\partial y_2}(y_3 - y_1) + \frac{\partial z}{\partial y_3}(y_1 - y_2) = 0 \quad (7)$$

соответствующая динамическая система определяется из уравнения

$$\frac{dy}{dt} = \{y_2 - y_3, y_3 - y_1, y_1 - y_2\}$$

рассмотренного в в, и вне прямой $\gamma = \{y \in R_3 : y_1 = y_2 = y_3\}$ известны ее два первых интеграла

$$z_1(y) = y_1 + y_2 + y_3, \quad z_2(y) = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2;$$

поэтому в окрестности любой точки $y \notin \gamma$ любое решение уравнения (7) описывается формулой

$$z(y) = \psi(y_1 + y_2 + y_3, y_1^2 + y_2^2 + y_3^2)$$

где $\psi(z_1, z_2)$ – любая функция с непрерывной производной.

Неоднородное уравнение

$$z'(y)\,\Phi(y, z) = \Psi(y, z) \quad (Y \times R_1 \to R_1)$$

легко приводится к однородному в пространстве $Y \times R_1$ (см. задачу 28).

§ 2.5. Дифференциальные уравнения (нелокальные теоремы).

2.51. В § 2.4 свойства решений дифференциального уравнения изучались в окрестности некоторой фиксированной точки; здесь мы рассмотрим свойства решений в больших областях. Пусть Y банахово пространство; в области $G\subset R_1\times Y$ (возможно, неограниченной) рассматривается дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dt}=\Phi(t,y) \qquad (1)$$

Будем называть подобласть $Q\subset G$ регулярной, если для некоторого $r>0$ всякий шар радиуса r с центром в точке $a\in Q$ целиком содержится в G. Функция $\Phi(t,y)$ в (1) предполагается непрерывной в G, а в любой регулярной подобласти $Q\subset G$ ограниченной

$$|\Phi(t,y)|\le A_Q \qquad (2)$$

и удовлетворяющей условию Липшица по y:

$$|\Phi(t,y_1)-\Phi(t,y_2)|\le B_Q|y_1-y_2| \qquad (3)$$

В этих предположениях, в силу 2.41, через каждую точку $(t_0,y_0)\in G$ проходит единственное решение уравнения (1):

$$y(t)\equiv y(t,t_0,y_0),\quad y(t_0)=y_0 \qquad (4)$$

Это решение, определенное в некотором интервале $|t-t_0|<\delta$, может не продолжаться на сколько-нибудь больший промежуток изменения t, например, потому, что при каком-то конечном значении $t=t_1$ оно войдет в границу области G. Покажем, что только такое обстоятельство и может служить причиной непродолжимости решения на всю ось t.

Теорема. Любое решение (4) может быть продолжено в обе стороны по t до выхода из любой регулярной подобласти $Q\subset G$.

Доказательство. Для данного решения (4) найдем наибольший полуинтервал $[t_0,\beta)$, на котором определено это решение; такой наибольший полуинтервал может быть определен как объединение всех полуинтервалов $[t_0,\beta')$ на которых решение (4) существует. (Заметим при этом, что величина $y(t,t_0,y_0)$, если она существует, определена однозначно, поскольку теорема единственности (2.41) запрещает двум решениям разъединиться в области G). Допустим, что $\beta<\infty$; рассмотрим любую посл-

довательность значений $t_n \in [t_0, \beta), t_n \to \beta$, и соответствующую последовательность точек $(t_n, y(t_n))$. Предположим, что дуга $(t, y(t))$ при $t \in [t_0, \beta)$ остается в регулярной подобласти $Q \subset G$, так что величины $\Phi(t, y(t))$ ограничены постоянной A_Q из (2). Тогда для $m < n$ мы имеем

$$|y(t_n) - y(t_m)| \leq \sup_{t_m \leq t \leq t_n} \left| \frac{dy(t)}{dt} \right| (t_n - t_m) \leq A_Q (t_n - t_m).$$

Таким образом, последовательность $y(t_n)$ фундаментальна в пространстве Y; обозначим ее предел через $\bar{y}$. В силу непрерывности функции $\Phi(t, y)$ имеем $\Phi(\beta, \bar{y}) = \lim_{n \to \infty} \Phi(t_n, y_n)$

поэтому, присоединяя к полуоткрытой дуге $(t, y(t)), t \in [t_0, \beta)$ точку $(\beta, \bar{y})$, мы получаем замкнутую дугу $(t, y(t)), t \in [t_0, \beta]$ с непрерывной касательной, т.е. решение уравнения (I). В силу теоремы 2.4I решение может быть продолжено за значение $t = \beta$ в противоречие с предположением. Следовательно, или $\beta = \infty$, или, при $\beta < \infty$, точки $(t, y(t))$ при $t \in [t_0, \beta)$ выходят из любой регулярной подобласти $Q \subset G$, что и утверждалось. В другую сторону $(t \to -\infty)$ теорема доказывается аналогично.

2.52. В дальнейшем мы распространим теоремы о непрерывной и дифференцируемой зависимости решения от начального условия на большие интервалы изменения t. Нам понадобятся следующие леммы:

Л е м м а I. Если функция $\varphi(t)$, определенная и непрерывная в промежутке $[0, T]$, удовлетворяет неравенству

$$|\varphi(t)| \leq M\left(1 + k\int_0^t |\varphi(\tau)|\, d\tau\right) \tag{I}$$

то она удовлетворяет в $[0, T]$ также и неравенству

$$|\varphi(t)| \leq M e^{kMt} \tag{2}$$

<u>Доказательство</u>. Положим $\int_0^t |\varphi(\tau)|\, d\tau = v(t)$

Неравенство (I) можно записать в виде

$$v'(t) \leq M(1 + k\, v(t)), \tag{3}$$

Д-во леммы 1

далее

$$\frac{v'(t)}{M(1+kv(t))} \leq 1$$

при всех $t \in [0,T]$

интегрируем

$$\int_0^{t_0} \frac{v'(t)dt}{M(1+kv(t))} \leq t_0$$

интеграл слева вычисляется и дает:

$$M(1+kv(t)) \leq Me^{kMt}$$

Объединяя с

$$v'(t) \leq M(1+kv(t))$$

получаем все необходимое

Для $t_0=0$ вместо $y(t,t_0,y_0)$ будем писать $y(t,y_0)$.

Лемма 2. Пусть кривая $\{y(t,y_0),t\}$, $0\le t\le T$ – решение уравнения 2.51 (I), расположенная целиком в регулярной подобласти Q области $G(\subset Y\times R_1)$. Утверждается, что существует такое $\tau>0$, что всякое решение $y(t,y_1)$, $|y_0-y_1|<\tau$, также определено для значений $0\le t\le T$.

Доказательство. Пусть $\varepsilon>0$ таково, что 3ε – расширение области Q лежит целиком в области G. Тогда ε – расширение H_1 и 2ε – расширение H_2 области Q являются вместе с Q регулярными подобластями и в частности в H_2 выполняется условие Липшица

$$|\phi(y,t)-\phi(z,t)|\le B|y-z|$$

с фиксированной постоянной B для любых $(y,t),(z,t)$ из H_2. Положим $\tau=\varepsilon\cdot e^{-BT}$ и рассмотрим любое решение $y(t,y_1)$ с $|y_0-y_1|<\tau$. Пусть $[0,\beta)$ наибольший полуинтервал, для которого точка $(y(t,y_1),t)$ определена и находится в области H_2; покажем, что $\beta\ge T$. Пусть $\beta<T$. Решения $y(t,y_1)$ и $y(t,y_0)$ удовлетворяют соотношениям

$$y(t,y_1)=y_1+\int_0^t\phi(y(\tau,y_1),\tau)\,d\tau,$$

$$y(t,y_0)=y_0+\int_0^t\phi(y(\tau,y_0),\tau)\,d\tau.$$

Отсюда при $0\le t<\beta$

$$|y(t,y_1)-y(t,y_0)|\le|y_1-y_0|+\int_0^t|\phi(y(\tau,y_1),\tau)-\phi(y(\tau,y_0),\tau)|\,d\tau\le$$

$$\le\tau+B\int_0^t|y(\tau,y_1)-y(\tau,y_0)|\,d\tau$$

По лемме I имеем при $t<\beta$

$$|y(t,y_1)-y(t,y_0)|\le\tau e^{B\beta}\le\varepsilon \qquad (4)$$

Таким образом, кривая $\{y(t,y_1),t\}$ при $0\le t<\beta$ лежит в регулярной подобласти H_1. Но тогда по 2.51 решение $y(t,y_1)$ может быть продолжено за значение $t=\beta$, причем для достаточно малых $t-\beta$ оно будет лежать в пределах области H_2 в противоречие с предположением. Лемма доказана.

2.53. Теорема о глобальной непрерывности. Пусть кривая $\{y(t, y_0), t\}$, $0 \le t \le T$ – дуга решения уравнения (I), целиком расположенная в регулярной подобласти Q области G. По 2.52 при некотором $\tau > 0$ существуют решения $y(t, y_1)$ для всех y_1, $|y_1 - y_0| < \tau$ и для $t \le T$. Утверждается, что точка $y(T, y_1)$ непрерывно зависит от y_1.

Доказательство. Достаточно рассмотреть последовательность точек $y_1^{(1)}, \ldots, y_1^{(m)}, \ldots \to y_0$ и показать, что $y(T, y_1^{(m)}) \to y(T, y_0)$. Оценка 2.52 (4) для $y_1 = y_1^{(m)}$, $\tau = \tau_m = |y_1^{(m)} - y_0|$, $t = T$ дает

$$|y(T, y_0) - y(T, y_1^{(m)})| \le \tau_m e^{BT} \to 0,$$

что и требуется.

2.54. Теорема о глобальной дифференцируемости. Если в условиях 2.51 функция $\phi(y, t)$ имеет непрерывную производную $\frac{\partial \phi(y,t)}{\partial y}$, то в предположениях 2.53 точка $y(T, y_0)$ зависит от y_0 дифференцируемым образом.

Доказательство. В силу 1.43а величина $\frac{\partial \phi(y,t)}{\partial y}$ оценивается в каждой регулярной подобласти Q постоянной из условия Липшица:

$$\left\| \frac{\partial \phi(y,t)}{\partial y} \right\| \le B_Q .$$

Все ближайшие построения мы будем проводить в пределах области V – объединения всех шаров радиуса $\tau(\varepsilon)$ (из леммы 2 2.52) с центрами в точках кривой $y(t, y_0)$, $0 \le t \le T$. Пусть $(\bar{t}, \bar{y})$ фиксированная точка на этой кривой. Как следует из 2.45 решение $y(t, \bar{t}, \bar{y})$ (совпадающее на самом деле с решением $y(t, y_0)$ в силу теоремы единственности) является дифференцируемым по $\bar{y}$ при каждом t, отстоящем от $\bar{t}$ менее, чем на $\delta_0 = \min(\varepsilon/B_Q, 1/A_Q)$. Разобьем отрезок $[0, T]$ точками деления $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = T$, так чтобы иметь $t_{j+1} - t_j < \delta_0$. Тогда мы получим:

$y_1 = y(t_1, y_0)$ – дифференцируемая функция от y_0;
$y_2 = y(t_2; t_1, y_1)$ – дифференцируемая функция от y_1;
. . . .
$y_m = y(t_m; t_{m-1}, y_{m-1})$ дифференцируемая функция от y_{m-1};

По теореме о дифференцируемости сложной функции, примененной должное число раз, мыполучаем, что $y_m = y(T, y_0)$ – дифференцируемая функция от y_0 ; это и утверждалось.

2.55. Уравнение во всем пространстве. Пусть в условиях 2.5I область $G \subset Y \times R_1$ совпадает со всем пространством $Y \times R_1$. Тогда для решения $y(t, y_0)$ как следует из 2.5I, возможны только два типа поведения при возрастании t : либо решение $y(t, y_0)$ определено при всех t, $0 \leq t < \infty$, либо при конечном значении $t = t_0$ решение $y(t, y_0)$ становится неограниченным по y. (Вторая ситуация реализуется в примере $\frac{dy}{dt} = y^2$ в $R_1 \times R_1$; решение, отвечающее начальному значению $y_0 = \frac{1}{a} > 0$ при $t = 0$, имеет вид $y = \frac{1}{a-t}$, и продолжается в положительном направлении t лишь до значения $t = a$).

Естественно возникает вопрос, какие условия на функцию $\phi(y,t)$ обеспечивают существование решения $y(t, y_0)$ при всех t, $0 \leq t < \infty$. Покажем, что таким условием является выполнение неравенства

$$|\phi(y,t)| \leq A_t + B_t \cdot |y|, \qquad (I)$$

где постоянные A_t и B_t равномерно ограничены в любой ограниченной области изменения t. Для доказательства, как и раньше, рассмотрим наибольший полуинтервал $[0, \beta)$, на котором определено решение $y(t, y_0)$; мы желаем показать, что $\beta = \infty$. Пусть $\beta < \infty$. Из уравнения

$$y(t) = y_1 + \int_0^t \phi(y, \tau)\, d\tau, \quad 0 \leq t < \beta,$$

следует, с учетом (I) неравенство

$$|y(t)| \leq |y_1| + \int_0^t (A_\tau + B_\tau |y|)\, d\tau \leq |y_1| + \bar{A}_\beta \cdot \beta + \bar{B}_\beta \int_0^t |y|\, d\tau,$$

где $\bar{A}_\beta = \sup\limits_{0 \leq t \leq \beta} A_t$, $\bar{B}_\beta = \sup\limits_{0 \leq t \leq \beta} B_t$. Применяя лемму I из 2.52 находим

$$|y(t)| \leq (|y_1| + \bar{A}_\beta \cdot \beta) \cdot e^{\bar{B}_\beta \cdot \beta}$$

Таким образом, в промежутке $[0, \beta)$ величина $y(t)$ ограничена и следовательно точка $\{y(t), t\}$ остается в регуляр-

ной подобласти области G ; но тогда по 2.51 решение $y(t,y_0)$ может быть продолжено за значение $t=\beta$, в противоречие с предположением. Итак, условие (I) достаточно для неограниченной продолжимости решения $y(t,y_0)$ по t .

Неравенство (I), в частности, заведомо выполняется для линейного уравнения

$$\frac{dy}{dt}=A(t)y+B(t) \qquad (2)$$

с непрерывными (при всех t) коэффициентами $A(t):R_1\to L(Y)$ и $B(t):R_1\to L(Y)$. Таким образом, всякое решение линейного уравнения (2) с непрерывными коэффициентами $A(t)$ и $B(t)$ может быть продолжено на всю ось t, $-\infty<t<\infty$.

2.56. Далее, как и в 2.45 мы будем интерпретировать решения уравнения $\frac{dy}{dt}=\phi(t,y)$ как кривые в пространстве Y , понимая t , как параметр, а решение $y=y(t,y_0)$ – как закон движения точки, находящейся в момент $t=0$ в y_0 , со скоростью $\phi(t,y)$. Как в 2.45, будем далее считать, что $\phi(t,y)$ не зависит от t , так что исходное уравнение имеет вид

$$\frac{dy}{dt}=\phi(y) \qquad (I)$$

Покажем, что справедливо равенство

$$y(t,y(t_1,y_0))=y(t+t_1,y_0) \qquad (2)$$

для всех t_1 и t , для которых определена левая часть. Действительно, если имеет смысл $y(t_1,y_0)$, то в (2) обе стороны совпадают при $t=0$ и во всяком случае определены для малых $t\neq 0$. Для этих t очевидно, что обе стороны удовлетворяют дифференциальному уравнению (I). Но тогда они совпадают при всех t , где они обе определены (поскольку теорема единственности 2.41 запрещает им где-либо разъединиться). Если этими значениями t еще не исчерпана область определения правой (левой) части, то в остающихся точках левую (правую) часть можно доопределить, положив ее равной соответствующим значениям правой (левой) части, причем левая (правая) часть останется решением уравнения (I), обращающимся в $y(t_1,y_0)$ при $t=0$.

2.57. В 2.45 было показано, что у всякой точки $y_0 \in \mathcal{Y}$ с $\phi(y_0) \neq 0$ существует окрестность $V(y_0)$ и диффеоморфизм π, переводящий совокупность точек дуг траекторий уравнения (I), пересекающих $V(y_0)$, в совокупность точек параллельных отрезков, притом проходимых (по t) с постоянной скоростью. Мы обобщим здесь это предложение на большие (по t) отрезки траекторий.

Рассмотрим в окрестности точки $y_0 \in \mathcal{Y}$ с $\phi(y_0) \neq 0$ построенное в I.88 разложение $\mathcal{Y} = L + H$, где L - одномерное, а H - замкнутое подпространство в $\mathcal{Y}$, и в подпространстве H - шар $H_\rho = \{h \in H, |h| \leq \rho\}$, который в произведении с отрезком T_δ составляет область значений диффеоморфизма π. Можно ли распространить диффеоморфизм π (определенный в 2.45 для $|t| \leq \delta$) на большие значения t? Траектории уравнения (I), рассматриваемые в целом, могут оказаться замкнутыми, могут вторично пересекать шар H_ρ, поэтому без дополнительных предположений ответ на поставленный вопрос не будет положительным. Наложим на решения уравнения (I) следующее условие:

<u>Условие невозвращения траекторий на промежутке</u> $[-t_1, t_2]$ $(t_1, t_2 > 0)$ для некоторого $\rho > 0$: любая траектория $y(t,h), h \in H_\rho, t \in [-t_1, t_2]$ не пересекает более (т.е. при $t \neq 0$) шар H_ρ.

Тогда распространение диффеоморфизма оказывается возможным:

<u>Теорема</u>: Если траектории $y(t,h)$ определены при $h \in H_\rho$ и $t \in [-t_1, t_2]$ и на промежутке $[-t_1, t_2]$ выполнено условие невозвращения, то существует диффеоморфизм множества $[-t_1, t_2] \times H_\rho$ на $y(t,h)$, переводящий точку (t,h) в $y(t,h)$.

<u>Доказательство</u>. Покажем, что отображение $\pi : (t,h) \to y(t,h)$ взаимно однозначно. Если бы мы имели при некоторых $t_0 < t_1, h_0 \in H_\rho, h_1 \in H_\rho$, $y(t_0,h_0) = y(t_1,h_1)$, то применяя (2) мы получили бы

$$y(t_1 - t_0, h_1) = y(-t_0, y(t_1,h_1)) = y(-t_0, y(t_0,h_0)) = y(0,h_0) = h_0,$$

что при $h_1 \neq h_0, t_1 \neq t_0$ противоречит условию невозвращения.

Значит отображение Π взаимно однозначно. Заметим далее, что среди точек $y(t,h)$ $(t\in[-t_1,t_2], h\in H_\rho)$ нет неподвижных точек (как вытекает из теоремы единственности); поэтому, на основании 2.45 отображение Π в некоторой окрестности каждой точки (t,h) является диффеоморфизмом (на соответствующую окрестность точки $y(t,h)$). Итак, отображение

$\Pi:(t,h)\to y(t,h)$ является взаимно однозначным и взаимно дифференцируемым; тем самым оно является диффеоморфизмом, что нам и требовалось.

В частности, если условие невозвращения при некотором $\rho>0$ выполняется для всей числовой оси $-\infty<t<\infty$, мы получаем, что совокупность точек всех траекторий $y(t,h)$, $h\in H_\rho$, $-\infty<t<\infty$ по формуле $y(t,h)\to(t,h)$ отображается диффеоморфно на совокупность всех точек параллельных прямых $-\infty<t<\infty$, $h\in H_\rho$.

В условиях этого предложения говорят, что совокупность траекторий $y(t,h)$ $(-\infty<t<\infty, h\in H_\rho)$ в ы п р я м л я е м а.

2.58. Уравнения механики системы.

а. Пусть дана механическая система S из n точек $y_1,\dots,y_n$ (R_3) с массами $m_1,\dots,m_n$. Если на точку y_j действует сила F_j, то движение происходит в соответствии с уравнениями Ньютона

$$m_i\, y_i''(t)=F_i(y_1,\dots,y_n,t)\ (i=1,\dots,n) \quad (I)$$

Если система (I) однородна, т.е. $F_i\equiv 0$, то она имеет очевидное решение $y_i=\alpha_i+v_i t$

$(i=1,\dots,n,$ α_i, v_i - постоянные)

отвечающее равномерному и прямолинейному движению каждой точки системы. Отсюда следует, что любые два решения общей системы (I) (неоднородной) приводятся одно к другому наложением некоторого равномерного и прямолинейного движения каждой точки. Этим можно воспользоваться для выбора наиболее подходящей системы координат. Любое частное решение системы (I) определяется однозначно по данным Коши (т.е. величинам $y_i(0)$ и $y_i'(0)$, начальным положениям и начальным скоростям); поэтому любое решение получается из частного решения с $y_i(0)=0$ и

$y_i'(0)=0 \quad (i=1,\dots,n)$ наложением равномерного и прямолинейного движения каждой точки.

Систему уравнений 2-го порядка (I) можно переписать как систему I-го порядка, введя новые неизвестные функции

$$v_i(t) = y_i'(t)$$

(скорости точек системы). Тогда система (I) примет следующий вид

$$\left.\begin{aligned} y_i'(t) &= v_i(t), \\ m_i v_i'(t) &= F_i(y_1,\dots,y_n,t) \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Можно считать, что мы имеем дело с одним уравнением в $6n$-мерном пространстве, составленном из координат векторов $y_1,\dots,y_n,v_1,\dots,v_n$. Это пространство называют фазовым пространством системы.

Имеются некоторые классические первые интегралы системы (2) – т.е. функции вида $f(y_1,\dots,y_n,v_1,\dots,v_n)$, постоянные вдоль каждой траектории. Рассмотрим простейшие из них.

б. Вектор $m_i v_i$ называется количеством движения точки y_i, вектор $\mathcal{P}=\sum\limits_{i=1}^{n} m_i v_i$ – количеством движения системы S. Мы имеем, очевидно,

$$\mathcal{P}'(t) = \sum_{i=1}^{n} m_i v_i'(t) = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{F}_i .$$

Поэтому, если силы, действующие на системы таковы, что проекция их суммы на некоторое направление ℓ равна 0, то и проекция вектора $\mathcal{P}'(t)$ на это же направление ℓ равна 0, и, следовательно, проекция $\mathcal{P}_\ell$ вектора $\mathcal{P}$ на направление ℓ также постоянна. Таким образом, в указанных условиях функция $\mathcal{P}_\ell$ является первым интегралом системы S. Если $\sum\limits_{i=1}^{n} \mathcal{F}_i = 0$, то мы получаем сразу три независимых первых интеграла, соответствующих трем проекциям вектора $\mathcal{P}$ на 3 координатные оси.

в. Вектор $y_i \times m_i v_i$ (векторное произведение) называется моментом количества движения точки y_i (относительно точки 0).

Вектор $M=\sum_{i=1}^{n} y_i \times m_i v_i$ называется моментом количества движения системы S относительно точки О. Мы имеем

$$M'(t)=\sum_{i=1}^{n} y_i' \times m_i v_i + \sum_{i=1}^{n} y_i \times m_i v_i' = \sum_{i=1}^{n} v_i \times m_i v_i +$$
$$+\sum_{i=1}^{n} y_i \times F_i = \sum_{i=1}^{n} y_i \times F_i .$$

Справа стоит сумма моментов сил F_i. Если силы F_i таковы, что сумма их моментов имеет нулевую проекцию на некоторое направление ℓ, то и вектор $M'(t)$ имеет нулевую проекцию на это направление, значит, проекция M_e самого вектора $M(t)$ на направление ℓ постоянна. Таким образом, функция M_e является в указанных условиях первым интегралом системы S. Если $\sum_{i=1}^{n} y_i \times F_i = 0$, то мы получаем три независимых первых интеграла, соответствующих трем проекциям вектора $\mathcal{P}$ на координатные оси.

г. Говорят, что числовая функция $U(y_1,\dots,y_n,t)$ является потенциалом системы S, если

$$\mathcal{F}_i = -\frac{\partial U(y_1,\dots,y_n,t)}{\partial y_i} \qquad (i=1,\dots,n)$$

Производная по векторному аргументу y_i понимается, как и ранее, как линейный функционал в соответствующем трехмерном пространстве, определенный производными от U по трем осям, например, y_{i1}, y_{i2}, y_{i3}:

$$\frac{\partial U(y_1,\dots,y_n,t)}{\partial y_i} = \left\{ \frac{\partial U(y_1,\dots,y_n,t)}{\partial y_{i1}}, \dots\dots \right\}$$

Знак - в определении потенциала ставится из соображений удобства, чтобы ускорение, создаваемое силой F_i, имело направление в сторону убывания потенциала. Введем, кроме того, функцию

$$T(S)=\sum_{i=1}^{n} m_i \frac{v_i^2}{2}$$

называемую кинетической энергией системы S. Уравнения (2) можно теперь записать в виде

$$m_i y_i'(t) = \frac{\partial T}{\partial v_i}$$
$$m_i v_i'(t) = -\frac{\partial U}{\partial y_i}$$

Отсюда вдоль траектории $\frac{d(T+U)}{dt} = \sum \frac{\partial T}{\partial v_i} \frac{dv_i}{dt} + \sum \frac{\partial U}{\partial y_i} \frac{dy_i}{dt} =$

$= \sum m_i y_i'(t) v_i'(t) - \sum m_i v_i'(t) v_i(t) \equiv 0$. Поэтому в указанных условиях функция $E = T + U$, называемая полной энергией системы S , является также первым интегралом системы S .

д. Уже приведенные первые интегралы дают возможность приводить к интегралам многие простые задачи механики. В качестве первого примера рассмотрим движение точки с массой 1 в плоскопараллельном поле. Здесь $n=1$, координаты точки мы обозначим x, y, z , соответствующие составляющие скорости через u , v , w . Сила F имеет одну составляющую, отличную от нуля, например,

$$F = \left\{ -\frac{\partial U(x)}{\partial x}, 0, 0 \right\}$$

Две составляющие силы равны 0, поэтому имеются два первых интеграла количества движения $v = c_1, w = c_2$.

Таким образом, проекции точки m на оси y и z движутся с постоянными скоростями; можно считать, что они равны 0, если соответственно движущейся взять систему координат. Тогда от движения точки останется талько движение вдоль оси x . Момент силы равен 0, и последний нетривиальный первый интеграл дает нам энергия

$$E = \frac{u^2}{2} + U(x) = const \qquad (3)$$

Например, если $U(x)$ имеет вид, показанный на рис. 2.5-I, то движение с заданной энергией c может происходить лишь в промежутке от $x_1(c)$ до $x_2(c)$. Для фактического получения закона движения в этом промежутке нужно проинтегрировать дифференциальное уравнение $E = c$, заменяя u на

Рис. 2.5-I

$\frac{dx}{dt}$; мы получим после разделения переменных

$$\frac{dx}{dt} = \pm\sqrt{2(E-\mathcal{U}(x))}$$

отсюда
$$\frac{dx}{\pm\sqrt{2(E-\mathcal{U}(x))}} = dt$$

Если $\mathcal{U}'(x_1) \neq 0,\ \mathcal{U}'(x_2) \neq 0$, то для времени перехода из x_1 в x_2 получим выражение в виде сходящегося интеграла

$$\Delta t = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{2(E-\mathcal{U}(x))}}.$$

е. Рассмотрим движение точки с массой 1 в осесимметричном поле. В тех же обозначениях, что и в д, и считая ось осью симметрии поля мы можем написать,

$$F = \left\{-\frac{\partial \mathcal{U}(\rho)}{\partial x}, -\frac{\partial \mathcal{U}(\rho)}{\partial y}, 0\right\},\ \rho = \sqrt{x^2+y^2}.$$

Третья составляющая силы равна 0, поэтому имеется один первый интеграл количества движения $w = c$; таким образом третья составляющая скорости постоянна и можно считать, что она равна 0. Поэтому движение происходит в плоскости x, y. Поскольку сила F центральна, ее момент относительно начала координат равен 0; отсюда имеется первый интеграл момента $(x,y,0) \times$ $\times\ (u,v,0) = c$, что дает одно нетривиальное соотношение

$$xv - uy = const \qquad (4)$$

Еще одно соотношение дает интеграл энергии

$$\frac{1}{2}(u^2+v^2) + \mathcal{U}(\rho) = c_2 \qquad (5)$$

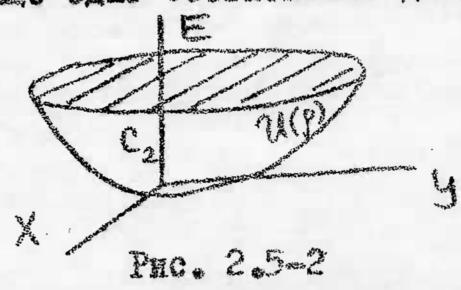


Рис. 2.5-2

Перейдем в уравнении (4) к полярным координатам:

$$x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi,$$

$$u = x'(t) = \rho'\cos\varphi - \rho\sin\varphi\cdot\varphi' \qquad (6)$$
$$v = y'(t) = \rho'\sin\varphi + \rho\cos\varphi\cdot\varphi' \qquad (7)$$

$$M = xv - uy = \rho\rho'\cos\varphi\cdot\sin\varphi + \rho^2\cos\varphi\cdot\varphi' - \rho\rho'\sin\varphi\cos\varphi + \rho^2\sin\varphi\cdot\varphi' = \rho^2\cdot\varphi'. \qquad (8)$$

Между прочим, полученная величина имеет простой геометрический смысл: это есть удвоенная производная по t от площади Σ (рис. 2.5-3). Действительно, как видно из рис. 2.5-3, дифференциал площади есть $\frac{1}{2}\rho^2 d\varphi$, и, следовательно, производная площади равна $\frac{1}{2}\rho^2 \varphi'(t)$. Поэтому для движения справедлив закон Кеплера: движущийся вектор (x, y) в равные промежутки времени покрывает равные площади. Подставляя (6) и (7) в (5), в свою очередь находим

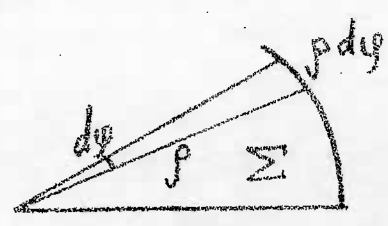


Рис. 2.5-3

$$\frac{1}{2}\left(\rho'^2 + \rho^2\varphi'^2\right) = c_2 - U(\rho),$$

и, используя (8),

$$\frac{1}{2}\left(\rho'^2 + \frac{M}{\rho^2}\right) = c_2 - U(\rho)$$

Это дифференциальное уравнение решается в квадратурах

$$t - t_0 = \int \frac{d\rho}{\pm\sqrt{2(c_2 - U(\rho)) - \frac{M}{\rho^2}}}$$

Чтобы подкоренное выражение оставалось неотрицательным, должны быть выполнены неравенства вида

$$0 \leq \rho_{min} \leq \rho \leq \rho_{max} \leq \infty \qquad (9)$$

таким образом, в общем случае движение происходит в кольце, выделенном условиями (9). Наконец, уравнение $M = \rho^2(t)\cdot\varphi'(t)$ при известном $\rho(t)$ позволяет написать и $\varphi(t)$ с помощью одной квадратуры; так как $M/\rho^2(t)$ не меняет знака, $\varphi(t)$ меняется монотонно. Получается движение вида, показанного на рис. 2.5-4. Траектория может быть не замкнутой.

Рис. 2.5-4.

Можно выписать дифференциальное уравнение, связывающее непосредственно ρ с φ, если перемножить уравнения

$$\frac{d\rho}{dt} = \sqrt{2(c_2 - U(\rho)) - \frac{M}{\rho^2}},$$

$$M = \rho^2 \frac{d\varphi}{dt};$$

мы получим
$$M\,d\rho = \rho^2\sqrt{2(c_2 - U(\rho)) - \frac{M}{\rho^2}}\,d\varphi$$

При $U(\rho) = \frac{k}{\rho}$ (закон тяготения Ньютона) это уравнение легко интегрируется, и мы получаем (с некоторыми постоянными C и e)
$$\rho = \frac{C}{1 + e\cos\varphi}$$
Это - фокальное уравнение конического сечения (эллипса при $e<1$, гиперболы при $e>1$, параболы при $e=1$).

ж. Движение точки с массой 1 в сферически симметричном поле. Здесь мы можем написать аналогично
$$F = \left\{-\frac{\partial U(r)}{\partial x}, -\frac{\partial U(r)}{\partial y}, -\frac{\partial U(r)}{\partial z}\right\}, r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

Поскольку сила центральна, ее момент относительно начала координат равен 0, откуда следует постоянство момента количества движения
$$M = (x, y, z) \times (u, v, w) = C$$

Но так как векторы (x, y, z) и (u, v, w) ортогональны M , то и плоскость этих векторов остается неизменной; следовательно, движение плоское. Беря новые оси x , y в плоскости движения и заменяя в ней r на ρ , мы приводим задачу к предыдущему случаю.

2.59. Обобщенные координаты в механике. Мы теперь для большей симметрии несколько изменим обозначения. Все составляющие векторов $y_1, \dots, y_n$ по трем осям обозначим подряд через $x_1, \dots, x_n$ (заменяя, в частности, и число $3n$ на n) Производную по времени будем обозначать точкой сверху; положим в частности, $v_1 = \dot{x}_1, \dots, v_n = \dot{x}_n$. Через $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n$ таким образом обозначим проекции сил на оси. Массу первой точки обозначим через m_1 , ее же - через m_2 и через m_3 ,

так что первые три уравнения Ньютона примут вид $m_1\ddot{x}_1=\mathcal{F}_1$, $m_2\ddot{x}_2=\mathcal{F}_2$, $m_3\ddot{x}_3=\mathcal{F}_3$; так же обозначим и остальные массы. Кинетическая энергия системы теперь примет вид

$$T=\sum_{i=1}^{n} m_i \frac{\dot{x}_i^2}{2};$$

потенциальная функция $\mathcal{U}$ будет функцией аргументов $x_1,\dots,x_n$. Уравнения Ньютона для потенциального силового поля примут вид

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_i(t)&=v_i(t)\\ m_i\dot{v}_i(t)&=-\frac{\partial \mathcal{U}(x)}{\partial x_i}\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Посмотрим, как преобразуются уравнения (1) при переходе к новым координатам.

Пусть $x_i=x_i(q_1,\dots,q_n)$. C^1- преобразование координат в пространстве R_n. Мы имеем при этом

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial x_i}{\partial q_j}\frac{\partial q_j}{\partial x_k}=\delta_k^i=\begin{cases}1 & \text{при } i=k\\ 0 & \text{при } i\neq k\end{cases} \qquad (2)$$

поскольку матрицы $x'(q)$ и $q'(x)$ взаимно обратны. Далее

$$v_i=\dot{x}_i=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial x_i}{\partial q_j}\dot{q}_j$$

$$T=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i v_i^2=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} m_i\frac{\partial x_i}{\partial q_j}\frac{\partial x_i}{\partial q_k}\dot{q}_j\dot{q}_k \qquad (3)$$

Величины

$$p_j=\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}$$

называются обобщенными импульсами системы.

Можно выразить p_j линейно через $\dot{q}_i$ или через v_i;

$$p_j=\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}=\sum_{i,k} m_i\frac{\partial x_i}{\partial q_j}\frac{\partial x_i}{\partial q_k}\dot{q}_k=$$

$$=\sum_{i,k,s} m_i\frac{\partial x_i}{\partial q_j}\frac{\partial x_i}{\partial q_k}\frac{\partial q_k}{\partial x_s}\dot{x}_s=\sum_i m_i\frac{\partial x_i}{\partial q_j}v_i \qquad (4)$$

Отсюда, в частности,

$$\frac{\partial p_j}{\partial v_i} = m_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j}, \quad \det\left\| \frac{\partial p_j}{\partial v_i} \right\| = m_1 \ldots m_n \det\left\| \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \right\|,$$

так что переход от p_j к v_i также обратим. Поэтому функцию T, которая является квадратичной формой от v_i, можно считать также квадратичной формой от $\dot{q}_i$ или от p_j (с коэффициентами, зависящими от q_i). Функцию U, первоначально зависящую от аргументов x_i можно считать также функцией от q_i. Мы получим сейчас дифференциальные уравнения для q_j и p_j, вытекающие из уравнений (I). Во-первых, мы имеем

$$\dot{q}_j = \sum_i \frac{\partial q_j}{\partial x_i} \dot{x}_i = \sum_i \frac{\partial q_j}{\partial x_i} \frac{1}{m_i} \frac{\partial T}{\partial v_i} = \sum_{i,s} \frac{\partial q_j}{\partial x_i} \frac{1}{m_i} \frac{\partial T}{\partial p_s} \cdot \frac{\partial p_s}{\partial v_i} =$$

$$= \sum \frac{\partial q_j}{\partial x_i} \frac{1}{m_i} \frac{\partial T}{\partial p_s} m_i \frac{\partial x_i}{\partial q_s} = \frac{\partial T(q,p)}{\partial p_j} \tag{5}$$

Во-вторых, из (4) мы получаем

$$\dot{p}_j = \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x_i}{\partial q_j}\right) v_i + \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \dot{v}_i =$$

$$= \sum_{\substack{i=1\\ s=1\\ k=1}}^{n} m_i \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_j \partial q_k} \dot{q}_k \frac{\partial x_i}{\partial q_s} \dot{q}_s - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \frac{\partial U}{\partial q_u} \frac{\partial q_u}{\partial x_i} \tag{6}$$

С другой стороны

$$\frac{\partial T(q,\dot{q})}{\partial q_j} = \frac{1}{2} \sum_{i,s,k} m_i \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{\partial x_i}{\partial q_s} \frac{\partial x_i}{\partial q_k}\right) \dot{q}_s \dot{q}_k =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i,s,k} m_i \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_j \partial q_s} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \dot{q}_s \dot{q}_k + \frac{1}{2} \sum_{i,s,k} m_i \frac{\partial x_i}{\partial q_s} \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_j \partial q_k} \dot{q}_s \dot{q}_k$$

Меняя местами во втором слагаемом индексы s и k, мы видим, что оно совпадает с первым.

Поэтому

$$\frac{\partial T(q,\dot{q})}{\partial q_j} = \sum_{i,s,k} m_i \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_j \partial q_k} \frac{\partial x_i}{\partial q_s} \dot{q}_k \dot{q}_s$$

Таким образом (6) (используя (2)) можно записать в виде

$$\dot{p}_j = \frac{\partial T(q,\dot{q})}{\partial q_j} - \frac{\partial U(q)}{\partial q_j} = \frac{\partial L(q,\dot{q})}{\partial q_j},$$

где $L(q,\dot{q}) = T(q,\dot{q}) - U(q)$ называется функцией Лагранжа. Эта функция от переменных $\dot{q}_j$ является квадратичной формой, так же как и ее производная по q_j. Если заменить в $\frac{\partial L}{\partial q_j}$ переменные $\dot{q}_j$ на p_j по формулам (4) – подчеркнем, после дифференцирования по q_j, а не до дифференцирования – получится некоторая функция от q_j и p_j. В результате учитывая (5) мы получим систему уравнений I-го порядка

$$\dot{q}_j = \frac{\partial T(q,p)}{\partial p_j}, \quad \dot{p}_j = \frac{\partial L(q,\dot{q})}{\partial q_j}\Big|_{\dot{q}_j = A(p)} \qquad (7)$$

которые называются уравнениями Лагранжа.

Уравнения Лагранжа, числом $2n$, сводятся к меньшему числу, если система подчинена некоторым связям, в результате которыхнекоторые из величин q_j при движении не меняются. В этом случае из уравнения (7) видно, что вдоль траектории функция L не зависит от соответствующих импульсов p_j и часть уравнений (7) отпадает.

В качестве применения рассмотрим задачу о колебаниях математического маятника. Система координат показана на рис. 2.5-5.

Мы имеем здесь

$$T = m\frac{v^2}{2} = m\,\frac{\dot{x}^2+\dot{y}^2}{2},$$

$$U = -mgy$$

Рис. 2.5-5.

Вводим обобщенные координаты $q_1 = \varphi$, $q_2 = L$; так как q_2 не меняется, вместо q_1 будем писать просто q. Мы имеем $x = L\sin\varphi$, $y = L\cos\varphi$,

$$\dot{x} = L\cos\varphi\cdot\dot{\varphi},\ \dot{y} = -L\sin\varphi\cdot\dot{\varphi},\ T = m\frac{\dot{x}^2+\dot{y}^2}{2} = \frac{mL^2\dot{\varphi}^2}{2}$$

Далее для обобщенного импульса получаем выражение

$$p = \frac{\partial T}{\partial \dot\varphi} = m l^2 \dot\varphi, \quad \dot\varphi = \frac{p}{m l^2}$$

и выражение T через p принимает вид

$$T = \frac{p^2}{2 m l^2}$$

Поскольку $U = -mgy = -mgl\cos\varphi$, уравнения Лагранжа таковы

$$\dot p = \frac{\partial (T-U)}{\partial \varphi} = -\frac{\partial U}{\partial \varphi} = -mgl\sin\varphi, \quad (8)$$

$$\dot\varphi = \frac{\partial T}{\partial p} = \frac{p}{m l^2} \quad (9)$$

Дифференцируя (9) по t и подставляя (8) находим

$$\ddot\varphi = \frac{\dot p}{m l^2} = -\frac{mgl\sin\varphi}{m l^2} = -\frac{g}{l}\sin\varphi$$

Для малых колебаний $(\sin\varphi \approx \varphi)$ получаем решения вида

$$\varphi = c \cdot \sin\sqrt{\frac{g}{l}}\, t,$$

имеющие период $2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$.